



"IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION"

international scientific-practical journal

ALMATY, KAZAKHSTAN

ISSN: 3007-8946

15 NOVEMBER 2025



els.education23@mail.ru



irc-els.com

**МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
«IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION»**

**INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL
«IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION»**



Main editor: G. Shulenbaev

Editorial colleague:

B. Kuspanova
Sh Abyhanova

International editorial board:

R. Stepanov (Russia)
T. Khushruz (Uzbekistan)
A. Azizbek (Uzbekistan)
F. Doflat (Azerbaijan)

International scientific journal «IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION», includes reports of scientists, students, undergraduates and school teachers from different countries (Kazakhstan, Tajikistan, Azerbaijan, Russia, Uzbekistan, China, Turkey, Belarus, Kyrgyzstan, Moldova, Turkmenistan, Georgia, Bulgaria, Mongolia). The materials in the collection will be of interest to the scientific community for further integration of science and education.

Международный научный журнал «IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION», включают доклады учёных, студентов, магистрантов и учителей школ из разных стран (Казахстан, Таджикистан, Азербайджан, Россия, Узбекистан, Китай, Турция, Беларусь, Кыргызстан, Молдавия, Туркменистан, Грузия, Болгария, Монголия). Материалы сборника будут интересны научной общественности для дальнейшей интеграции науки и образования.

15 ноября 2025 г.
Almaty, Kazakhstan

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17696881>

IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR FAZOSIDA KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL OPERATORLAR NAZARIYASI

MUSTAFOYEV NEMAT SAFOYEVICH

katta o'qituvchi, Buxoro davlat texnika universiteti, Buxoro, O'zbekiston

Annotasiya. Ushbu maqolada ikki o'zgaruvchili funksiyalar fazosidagi kasr tartibli differensial operatorlar nazariyasining ayrim masalalari ko'rib chiqilgan. Tadqiqotda Marsho formasidagi aralash kasr tartibli hosilalarning asosiy xususiyatlari tahlil qilingan va ular yordamida oddiy hamda aralash Hölder shartlari bilan aniqlangan funksiyalar uchun vaznsiz fazolarini aks ettiruvchi operatorlarning chegaralanganligi haqidagi teoremlar isbotlangan. Shu bilan birga, aralash kasr tartibli integral va hosila operatorlarining ta'sir doirasi hamda ularning ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun mavjudligi va yagona yechimga ega bo'lish sharoitlari o'rganilgan. Olingan natijalar kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasidagi tegishli chegaraviy masalalarni tahlil qilishda amaliy ahamiyat kasb etadi.

Kalitli so'zlar: ikki o'zgaruvchili funksiya, Marsho formasi, kasr tartibli hosila, kasr tartibli integral, Hölder fazosi.

THEORY OF FRACTIONAL-ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE SPACE OF TWO-VARIABLE FUNCTIONS

Abstract. This paper investigates certain problems related to the theory of fractional-order differential operators in the space of two-variable functions. The study analyzes the main properties of mixed fractional derivatives in the sense of Marchaud and, based on these properties, establishes theorems on the boundedness of operators reflecting the unweighted Hölder spaces defined by ordinary and mixed Hölder conditions. Furthermore, the domains of influence of mixed fractional integrals and derivatives, as well as the conditions for the existence and uniqueness of solutions for two-variable functions, are examined. The obtained results have practical significance for the analysis of boundary value problems arising in the theory of fractional differential equations.

Keywords: two-variable function, Marchaud form, fractional derivative, fractional integral, Hölder space.

Dunyoda kasr tartibli integro-differensial operatorlarning turli fazolarda xossalarini o'rganishga doir imliy izlanishlar olib borilmoqda. Shu jumladan, kasr tartibli differensial operatorlarning ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning Hölder fazolarida xossalarini o'rganish va ularni to'g'ridan-to'g'ri ko'p o'zgaruvchilarga kengaytirish (yoyish) eng dolzarb muammolardan biri bo'lib qolmoqda.

Ko'p ilmiy ishlar bir o'zgaruvchili funksiyalarning Hölder fazolarida kasr tartibli integral-differensiallash operatorlarining xatti-harakati haqidagi masalalariga bag'ishlangandir. Ilk aniq natijalar G.H.Hardi va Dj.E.Littlvudga tegishlidir [11]. Keyinchalik Hardi-Littlvudlarning bu natijalari turli yo'nalishlarda umumlashtirilgan [2], [8], [10].

B.S.Rubin [9] va B.G.Vakulovlar [12] bu natijalarni vaznli holda umumlashtirdi. Keyinchalik N.K.Karapetyans, L.D.Shankishvili Hölder fazosida Hardi-Littlvud teoremasining qisqacha isbotini keltirdilar [1].

Ikki o'zgaruvchili funksiyalarning Hölder fazolarida Riman-Liuvillning aralash kasr tartibli integral operatorlariga doir bunday tasdiqlar o'rganilgan bo'lib [3]-[7], kasr tartibli differensial operatorlar o'rganilmagan.

Ushbu maqola shunday masalaga qaratilgan bo'lib, Marsho formasidagi aralash kasr tartibli hosilaning xususiyatlaridan foydalanib, oddiy va aralash Hölder shartlari bilan aniqlangan ikki

o'zgaruvchili funksiyalarning vaznsiz Hölder fazolarini akslantiruvchi aralash kasr tartibli integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremlar isbotlangan.

Biz ikki o'zgaruvchi funksiyalarning Hölder fazolarida (α_1, α_2) tartibli Marsho formasidagi aralash kasr tartibli hosilasi olingan:

$$(D_{0+,0+}^{\alpha_1,\alpha_2} \varphi)(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \left[\frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(t_1, t_2)}{(x_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_1 dt_2 \right], \quad (1)$$

bunda $x_i > 0$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2$.

Tadqiqot ishida integral operatorlar usullari, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va kasr tartibli integrallar nazariyasidan foydalanilgan.

$\mathbb{R}^2$ da $\varphi(x_1, x_2)$ uzuksiz funksiya aniqlangan bo'lsin. Quyida kelgusida zarur bo'ladigan belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} \left(\Delta_{h_1}^{1,0} \varphi \right)(x_1, x_2) &= \varphi(x_1 + h_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2), \quad \left(\Delta_{h_2}^{0,1} \varphi \right)(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2 + h_2) - \varphi(x_1, x_2), \\ \left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right)(x_1, x_2) &= \left(\Delta_{h_1}^{1,0} \left(\Delta_{h_2}^{0,1} \varphi \right) \right)(x_1, x_2) = \\ &= \varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \varphi(x_1 + h_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2 + h_2) + \varphi(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Yuqoridagi belgilashlarga asosan, ushbu

$$\varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = \left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right)(x_1, x_2) + \left(\Delta_{h_1}^{1,0} \varphi \right)(x_1, x_2) + \left(\Delta_{h_2}^{0,1} \varphi \right)(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2) \quad (2)$$

ayniyat o'rinli bo'ladi.

Ushbu $\varphi(x_1, x_2)$ funksiya $Q = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq b_1, 0 \leq x_2 \leq b_2 \}$ to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. $\lambda_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2$ bo'lsin. Agar barcha $(x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2) \in Q$ uchun ushbu

$$|\varphi(x'_1, x'_2) - \varphi(x''_1, x''_2)| \leq C_1 |x'_1 - x''_1|^{\lambda_1} + C_2 |x'_2 - x''_2|^{\lambda_2}$$

shart bajarilsa, u holda $\varphi(x_1, x_2) \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ Hölder fazosiga qarashli deyiladi, bunda C_1, C_2 o'zgarmaslar. Yuqoridagi shart

$$\left| \left(\Delta_{h_1}^{1,0} \varphi \right)(x_1, x_2) \right| \leq C_1 |h_1|^{\lambda_1} \quad \text{va} \quad \left| \left(\Delta_{h_2}^{0,1} \varphi \right)(x_1, x_2) \right| \leq C_2 |h_2|^{\lambda_2} \quad (3)$$

shartlarga ekvivalentdir

Q to'g'ri to'rtburchakning chegaraviy nuqtalarida nolga teng bo'luvchi $H^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ funksiyalar fazosining qism fazosini $H_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ orqali belgilaymiz.

2-ta'rif. Agar $\varphi(x_1, x_2) \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ va

$$\left| \left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right)(x_1, x_2) \right| \leq C_{12} |h_1|^{\lambda_1} |h_2|^{\lambda_2}$$

bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ deyiladi, bunda $\lambda_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2$.

Ushbu $\tilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ sinfni aralash Hölder sinfi deb ataymiz.

Agar $\varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ va $\varphi(x_1, x_2)|_{x_i=0} \equiv \varphi(x_1, x_2)|_{x_i=b_i} \equiv 0$, $i = 1, 2$ bo'lsa, u holda $\varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ deyiladi.

Bu fazolar Banach fazolari bo'lib, ularning normalari standart usulda aniqlanib, ular quyidagicha

$$\|\varphi\|_{H^{\lambda_1, \lambda_2}} := \|\varphi\|_{C(Q)} + \sup_{\substack{x_1, x_1+h_1 \in [0, b_1] \\ x_2 \in [0, b_2]}} \frac{\left| \left(\Delta_{h_1} \varphi \right)(x_1, x_2) \right|}{|h_1|^{\lambda_1}} + \sup_{\substack{x_2, x_2+h_2 \in [0, b_2] \\ x_1 \in [0, b_1]}} \frac{\left| \left(\Delta_{h_2} \varphi \right)(x_1, x_2) \right|}{|h_2|^{\lambda_2}},$$

$$\|\varphi\|_{\tilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}} := \|\varphi\|_{H^{\lambda_1, \lambda_2}} + \sup_{\substack{x_1, x_1+h_1 \in [0, b_1] \\ x_2, x_2+h_2 \in [0, b_2]}} \frac{\left| \left(\Delta_{h_1, h_2} \varphi \right)(x_1, x_2) \right|}{|h_1|^{\lambda_1} |h_2|^{\lambda_2}}.$$

Agar $\varphi \in H^{\lambda_1, \lambda_2}$ bo'lsa, u holda $\forall \theta \in [0, 1]$ uchun quyidagi o'rindir

$$\left| \left(\Delta_{h_1, h_2} \varphi \right)(x_1, x_2) \right| \leq C_0 |h_1|^{\theta \lambda_1} |h_2|^{(1-\theta) \lambda_2} \quad (4)$$

bu erda $C_0 = 2C_1^\theta C_2^{1-\theta}$. θ ixtiyoriy bo'lgani uchun (4) tengsizlik quyidagi tengsizlikka ekvivalentdir

$$\left| \left(\Delta_{h_1, h_2} \varphi \right)(x_1, x_2) \right| \leq C \min \left\{ |h_1|^{\lambda_1}, |h_2|^{\lambda_2} \right\}. \quad (5)$$

3-ta'rif. $\mathbf{R}^2$ da aniqlangan $\rho(x_1, x_2)$ – manfiy mas funksiya bo'lsin. $\rho(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ ni qanoatlantiruvchi $\varphi(x_1, x_2)$ funksiyalar sinfini $\tilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(\rho) = \tilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(Q; \rho)$ orqali belgilaymiz. Bu sinf vaznli aralash Hölder fazosi deb ataladi.

Q to'g'ri to'rtburchakning chegaraviy nuqtalarida nolga teng bo'luvchi $\varphi(x_1, x_2) \rho(x_1, x_2)$ funksiyalar $\tilde{H}^\lambda = \tilde{H}^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ fazosining qism fazosini $\tilde{H}_0^\lambda = \tilde{H}_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ orqali belgilaymiz.

Biz quyida bir o'zgaruvchili funksiya uchun ma'lum bo'lgan ta'riflar, belgilashlar, yordamchi ma'lumotlar va kasr tartibli integral operatorning asosiy tasdiqlari bayon qilamiz. Ushbu tasdiqlardan foydalanib asosiy natijalarni isbotlashda foydalanamiz.

1-lemma [11]. Agar $f(x) \in H^\lambda([a, b])$ va $0 < \alpha < \lambda$ bo'lsa, u holda

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{|x - a|^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha}([a, b]) \text{ va } \|g\|_{H^{\lambda-\alpha}} \leq C \|f\|_{H^\lambda},$$

bu erda $C = \text{const}$ $f(x)$ ga bog'liq emas.

Isbot. $h > 0$, $x, x+h \in [a, b]$ bo'lsin. Quyidagi orttirmani qaraymiz

$$|g(x+h) - g(x)| \leq \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(x+h-a)^\alpha} + |f(x) - f(a)| \left| \frac{1}{(x-a)^\alpha} - \frac{1}{(x+h-a)^\alpha} \right|.$$

Lemma shartiga ko'ra $f(x) \in H^\lambda([a, b])$ bo'lgani uchun quyidagi tengsizliklar o'rindir:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq Ch^\lambda \text{ va } |f(x) - f(a)| \leq C(x-a)^\lambda.$$

Bu tengsizliklardan foydalanib, yuqoridagi orttirmani quyidagicha ifodalab olamiz:

$$|g(x+h) - g(x)| \leq C \left[h^\lambda (x+h-a)^\alpha + (x-a)^\lambda \left| \frac{1}{(x-a)^\alpha} - \frac{1}{(x+h-a)^\alpha} \right| \right] = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Bundan $\Delta_1 \leq Ch^{\lambda-\alpha}$ tengsizlikning o'rirligiga shubha qolmaydi.

Endi Δ_2 ni baholaymiz. Bunda $x-a \leq h$ va $x-a > h$ bo'lgan hollarni qaraymiz. Birinchi holda

$$|\sigma_1^\mu - \sigma_2^\mu| \leq |\sigma_1 - \sigma_2|^\mu, \quad (\sigma_1 \neq \sigma_2)$$

tengsizlikni e'tiborga olsak, u holda quyidagiga ega bo'lamiz

$$\Delta_2 \leq C(x-a)^\lambda h^{-\alpha} \leq Ch^{\lambda-\alpha}.$$

Ikkinchi holda esa $(1+x)^\mu - 1 \leq \mu x$, $(0 \leq \mu \leq 1, x \geq 0)$ tengsizlikni qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\Delta_2 \leq C(x-a)^\lambda (x+h-a)^{-\alpha} \left[\left(1 + \frac{h}{x-a} \right)^\alpha - 1 \right] \leq Ch(x+h-a)^{-\alpha} (x-a)^{\lambda-1} \leq Ch^{\lambda-\alpha}.$$

Kesmalarda bir o'zgaruvchili funksiyalarning Marsho formasidagi kasr tartibli hosilasi quyidagi ko'rinishga ega

$$(\mathbf{D}_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} + \alpha \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \right), \quad x > a. \quad (6)$$

1-teorema [11]. Agar $f(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\alpha < \lambda \leq 1$ bo'lsa, u holda

$$(\mathbf{D}_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \psi(x),$$

bu erda $\psi(x) \in H^{\lambda-\alpha}([a, b])$ va $\psi(a) = 0$, shu bilan birga $\|\psi\|_{H^{\lambda-\alpha}} \leq C\|f\|_{H^\lambda}$ o'rinli.

Isbot. (6) tenglikni quyidagicha ifodalab olamiz:

$$(\mathbf{D}_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^\alpha} + \alpha \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \psi(x),$$

bu erda

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^\alpha} + \alpha \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (g(x) + \alpha \psi_1(x)).$$

1-lemmaga ko'ra $\|g\|_{H^{\lambda-\alpha}} \leq C\|f\|_{H^\lambda}$. Biz bu yerda endi $\|\psi_1\|_{H^{\lambda-\alpha}} \leq C\|f\|_{H^\lambda}$ bajarilishini ko'rsatishimiz etarlidir.

$h > 0$, $x, x+h \in [a, b]$ bo'lsin. Quyidagi orttirmani qaraymiz

$$\begin{aligned} \psi_1(x+h) - \psi_2(x) &= \int_0^{x-a} (f(x) - f(x-t)) \left[(t+h)^{-1-\alpha} - t^{-1-\alpha} \right] dt + \int_{-h}^0 \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{1+\alpha}} dt + \\ &+ \int_0^{x-a} \frac{f(x+h) - f(x)}{(t+h)^{1+\alpha}} dt = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Quyidagi baholarning o'rinligini ko'rish qiyinmas:

$$|I_1| \leq C \int_0^\infty t^\lambda \left| (t+h)^{-1-\alpha} - t^{-1-\alpha} \right| dt = C_1 h^{\lambda-\alpha}, \text{ bu yerda } C_1 = C \int_0^\infty t^\lambda \left| (t+1)^{-1-\alpha} - t^{-1-\alpha} \right| dt < \infty,$$

$$|I_2| \leq C \int_{-h}^0 (t+h)^{\lambda-\alpha-1} dt = Ch^{\lambda-\alpha} \quad \text{va} \quad |I_3| \leq Ch^\lambda \int_0^\infty (t+h)^{\alpha-1} dt = Ch^{\lambda-\alpha}.$$

Yuqoridagi baholarga asoslanadigan bo'lsa, u holda $|\psi_1(x)| \leq C \int_0^{x-a} t^{\lambda-\alpha-1} dt$ bo'ladi, bundan

$\psi_1(a) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Natijalar. Biz (1) ko'rinishdagi kasr tartibli integral operatorni Q to'g'ri to'rtburchakda qaraymiz.

2-lemma. $\varphi(x_1, x_2) \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$, $\alpha_i < \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2$ bo'lsin, u holda (1) uchun quyidagi tenglik o'rinlidir

$$(\mathbf{D}_{0+, 0+}^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi)(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \left[\frac{\varphi(0,0)}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} + \frac{\alpha_1}{x_2^{\alpha_2}} \psi_1(x_1) + \frac{\alpha_2}{x_1^{\alpha_1}} \psi_2(x_2) + \alpha_1 \alpha_2 \psi(x_1, x_2) \right], \quad (7)$$

va shu bilan birga

$$|\psi_1(x_1)| \leq C_1 x_1^{\lambda_1 + \alpha_1}, \quad |\psi_2(x_2)| \leq C_2 x_2^{\lambda_2 + \alpha_2}, \quad |\psi(x_1, x_2)| \leq C_{12} x_1^{(\lambda_1 + \alpha_1)\theta} x_2^{(\lambda_2 + \alpha_2)(1-\theta)} \quad (8)$$

tengsizliklar bajariladi, bu erda

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1) &= \frac{\varphi(x_1, 0) - \varphi(0, 0)}{x_1^{\alpha_1}} + \int_0^{x_1} \frac{\varphi(x_1, 0) - \varphi(t_1, 0)}{(x_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1, \\ \psi_2(x_2) &= \frac{\varphi(0, x_2) - \varphi(0, 0)}{x_2^{\alpha_2}} + \int_0^{x_2} \frac{\varphi(0, x_2) - \varphi(0, t_2)}{(x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2, \\ \psi(x_1, x_2) &= \frac{\left(\Delta_{x_1, x_2}^{1,1} \varphi\right)(0, 0)}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} + \frac{1}{x_2^{\alpha_2}} \int_0^{x_1} \frac{\left(\Delta_{x_1 - t_1, x_2}^{1,1} \varphi\right)(t_1, 0)}{(x_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1 + \frac{1}{x_1^{\alpha_1}} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{x_1, x_2 - t_2}^{1,1} \varphi\right)(0, t_2)}{(x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2 + \\ &\quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{x_1 - t_1, x_2 - t_2}^{1,1} \varphi\right)(t_1, t_2)}{(x_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Isbot. (1) da (2) tenglikdan foydalansak, u holda (7) ni hosil qilamiz. Lemma shartiga ko'ra $\varphi(x_1, x_2) \in H^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ bo'lgani uchun (8) tengsizliklar o'rinalidir. Bu baholarning o'rinaliligini (3) va (4) tengsizliklardan foydalanib isbotlash mumkin.

2-teorema. Agar $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $0 < \alpha_i < 1$ va $\alpha_i < \lambda_i \leq 1, i = 1, 2$ bo'lsa, u holda $H_0^{\lambda_1 + \alpha_1, \lambda_2 + \alpha_2}(Q)$ fazoni $H_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ fazoga akslantiruvchi $\mathbf{D}_{0+, 0+}^{\alpha_1, \alpha_2}$ operator chegaralangandir.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\varphi(x_1, x_2) \in H_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ bo'lgani uchun (7) dan $(\mathbf{D}_{0+, 0+}^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi)(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)$ ni hosil qilamiz. $h_1 > 0$, $x_1, x_1 + h_1 \in [0, b_1]$ bo'lsin. Quyidagi orttirmani qaraymiz

$$\begin{aligned} \psi(x_1 + h_1, x_2) - \psi(x_1, x_2) &= x_2^{-\alpha_2} \left[\frac{\left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi\right)(0, 0)}{(x_1 + h_1)^{\alpha_1}} + \left(\Delta_{x_1, x_2}^{1,1} \varphi\right)(0, 0) \left(\frac{1}{(x_1 + h_1)^{\alpha_1}} - \frac{1}{x_1^{\alpha_1}} \right) \right] + \\ &\quad + \int_0^{x_1} \frac{\left(\Delta_{h_1, x_2}^{1,1} \varphi\right)(x_1, 0)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1 + \int_0^{x_1} \left(\Delta_{x_1 - t_1, x_2}^{1,1} \varphi\right)(t_1, 0) \left[(x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1 + \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_1 + h_1} \frac{\left(\Delta_{x_1 + h_1 - t_1, x_2}^{1,1} \varphi\right)(t_1, 0)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1 + \frac{1}{(x_1 + h_1)^{\alpha_1}} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{h_1, x_2 - t_2}^{1,1} \varphi\right)(0, t_2)}{(x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2 + \\ &\quad + \left[\frac{1}{(x_1 + h_1)^{1+\alpha_1}} - \frac{1}{x_1^{1+\alpha_1}} \right] \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{x_1, x_2 - t_2}^{1,1} \varphi\right)(0, t_2)}{(x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2 + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{h_1, x_2 - t_2}^{1,1} \varphi\right)(x_1, t_2)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_1 dt_2 + \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_1 + h_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{x_1 + h_1 - t_1, x_2 - t_2}^{1,1} \varphi\right)(t_1, t_2)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_1 dt_2 + \\ &\quad + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{x_1 - t_1, x_2 - t_2}^{1,1} \varphi\right)(t_1, t_2)}{(x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} \left[\frac{1}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} - \frac{1}{(x_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} \right] dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

$\varphi(x_1, x_2) \in H_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ va $\theta \in [0, 1]$ bo'lgani uchun $\theta = 1$ holni qaraymiz. Natijada quyidagiga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned} |\psi(x_1 + h_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)| \leq C_1 & \left[\frac{h_1^{\lambda_1}}{(x_1 + h_1)^{\alpha_1}} + x_1^{\lambda_1} \left| \frac{1}{(x_1 + h_1)^{\alpha_1}} - \frac{1}{x_1^{\alpha_1}} \right| + h_1^{\lambda_1} \int_0^{x_1} \frac{dt_1}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} + \right. \\ & \left. + \int_{x_1}^{x_1+h_1} \frac{dt_1}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1-\lambda_1}} + \int_0^{x_1} (x_1 - t_1)^{\lambda_1} [(x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1}] dt_1 \right]. \end{aligned}$$

1-lemma va 1-teoremlarning isbotlaridagi baholashlardan foydalanib, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz

$$|\psi(x_1 + h_1, x_2) - \psi(x_1, x_2)| \leq C_1 h_1^{\lambda_1 - \alpha_1}.$$

Xuddi shunday ammallarni ikkinchi o'zgaruvchi bo'yicha ham bajarib, quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz

$$|\psi(x_1, x_2 + h_2) - \psi(x_1, x_2)| \leq C_2 h_2^{\lambda_2 - \alpha_2}.$$

3-teorema. Agar $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\alpha_i < \lambda_i \leq 1$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2$ bo'lsa, u holda $\tilde{H}_0^{\lambda_1 + \alpha_1, \lambda_2 + \alpha_2}(Q)$ fazoni $\tilde{H}_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ fazoga akslantiruvchi $\mathbf{D}_{0+, 0+}^{\alpha_1, \alpha_2}$ operator chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra $\varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$ bo'lgani uchun $(\mathbf{D}_{0+, 0+}^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi)(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)$ bo'ladi. Bu yerda asosiy masala, bu boshqa o'zgaruvchilar bo'yicha olingan baholarni yo'qotmasdan har bir o'zgaruvchi uchun eng yaxshi baholarni olishga imkon beruvchi mos orttirmani topishdan iboratdir. Quyidagi aralash orttirmani qaraymiz:

$$\left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \psi \right)(x_1, x_2) := \sum_{k=1}^{25} J_k,$$

bu yerda

$$J_1 = \left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right)(x_1, x_2) (x_1 + h_1)^{-\alpha_1} (x_2 + h_2)^{-\alpha_2},$$

$$J_2 = \left(\Delta_{h_1, x_2}^{1,1} \varphi \right)(x_1, 0) (x_1 + h_1)^{-\alpha_1} [x_2^{-\alpha_2} - (x_2 + h_2)^{-\alpha_2}],$$

$$J_3 = \left(\Delta_{x_1, h_2}^{1,1} \varphi \right)(0, x_2) (x_2 + h_2)^{-\alpha_2} [x_1^{-\alpha_1} - (x_1 + h_1)^{-\alpha_1}],$$

$$J_4 = \left(\Delta_{x_1, x_2}^{1,1} \varphi \right)(0, 0) [x_1^{-\alpha_1} - (x_1 + h_1)^{-\alpha_1}] [x_2^{-\alpha_2} - (x_2 + h_2)^{-\alpha_2}],$$

$$J_5 = (x_1 + h_1)^{-\alpha_1} \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{\left(\Delta_{h_1, x_2+h_2-t_2}^{1,1} \varphi \right)(x_1, t_2)}{(x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2,$$

$$J_6 = (x_1 + h_1)^{-\alpha_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right)(x_1, x_2)}{(x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2,$$

$$J_7 = [x_1^{-\alpha_1} - (x_1 + h_1)^{-\alpha_1}] \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{\left(\Delta_{h_1, x_2+h_2-t_2}^{1,1} \varphi \right)(0, t_2)}{(x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2,$$

$$J_8 = (x_2 + h_2)^{-\alpha_2} \int_{x_1}^{x_1+h_1} \frac{\left(\Delta_{x_1+h_1-t_1, h_2}^{1,1} \varphi \right)(t_1, x_2)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1,$$

$$\begin{aligned}
 J_9 &= (x_2 + h_2)^{-\alpha_2} \int_0^{x_1} \frac{\left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (x_1, x_2)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1, \\
 J_{10} &= \left[x_2^{-\alpha_2} - (x_2 + h_2)^{-\alpha_2} \right] \int_{x_1}^{x_1+h_1} \frac{\left(\Delta_{x_1+h_1-t_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, 0)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1, \\
 J_{11} &= (x_1 + h_1)^{-\alpha_1} \int_0^{x_2} \left(\Delta_{h_1, x_2-t_2}^{1,1} \varphi \right) (x_1, t_2) \left[(x_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2 + h_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_2, \\
 J_{12} &= (x_2 + h_2)^{-\alpha_2} \int_0^{x_1} \left(\Delta_{x_1-t_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, x_2) \left[(x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1, \\
 J_{13} &= \left[x_2^{-\alpha_2} - (x_2 + h_2)^{-\alpha_2} \right] \int_0^{x_1} \frac{\left(\Delta_{h_1, x_2}^{1,1} \varphi \right) (x_1, 0)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1, \\
 J_{14} &= \left[x_1^{-\alpha_1} - (x_1 + h_1)^{-\alpha_1} \right] \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{x_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (0, x_2)}{(x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2, \\
 J_{15} &= \left[x_1^{-\alpha_1} - (x_1 + h_1)^{-\alpha_1} \right] \int_0^{x_2} \left(\Delta_{x_1, x_2-t_2}^{1,1} \varphi \right) (0, t_2) \left[(x_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2 + h_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_2, \\
 J_{16} &= \left[x_2^{-\alpha_2} - (x_2 + h_2)^{-\alpha_2} \right] \int_0^{x_1} \left(\Delta_{x_1-t_1, x_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, 0) \left[(x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1, \\
 J_{17} &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (x_1, x_2) dt_1 dt_2}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}}, \\
 J_{18} &= \int_0^{x_1} \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{\left(\Delta_{h_1, x_2+h_2-t_2}^{1,1} \varphi \right) (x_1, t_2) dt_1 dt_2}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}}, \\
 J_{19} &= \int_{x_1}^{x_1+h_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{h_1+x_1-t_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, h_2) dt_1 dt_2}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}}, \\
 J_{20} &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{h_1, x_2-t_2}^{1,1} \varphi \right) (x_1, t_2)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} \left[(x_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2 + h_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_1 dt_2, \\
 J_{21} &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{x_1-t_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, x_2)}{(x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} \left[(x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1 dt_2, \\
 J_{22} &= \int_{x_1}^{x_1+h_1} \int_0^{x_2} \frac{\left(\Delta_{x_1+h_1-t_1, x_2-t_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, t_2)}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} \left[(x_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2 + h_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_1 dt_2,
 \end{aligned}$$

$$J_{23} = \int_0^{x_1} \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{\left(\Delta_{x_1-t_1, x_2+h_2-t_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, t_2)}{(x_2+h_2-t_2)^{1+\alpha_2}} \left[(x_1-t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1+h_1-t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1 dt_2,$$

$$J_{24} = \int_{x_1}^{x_1+h_1} \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{\left(\Delta_{x_1+h_1-t_1, x_2+h_2-t_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, t_2) dt_1 dt_2}{(x_1+h_1-t_1)^{1+\alpha_1} (x_2+h_2-t_2)^{1+\alpha_2}},$$

$$J_{25} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \left(\Delta_{x_1-t_1, x_2-t_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, t_2) \left[(x_1-t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1+h_1-t_1)^{-1-\alpha_1} \right] \left[(x_2-t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2+h_2-t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_1 dt_2$$

Teorema shartiga ko'ra $\varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}_0^{\lambda_1, \lambda_2}(Q)$, bundan:

$$|J_1| \leq C_{12} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} (x_1+h_1)^{-\alpha_1} (x_2+h_2)^{-\alpha_2},$$

$$|J_2| \leq C_{12} h_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \left[x_2^{-\alpha_2} - (x_2+h_2)^{-\alpha_2} \right],$$

$$|J_3| \leq C_{12} x_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} (x_2+h_2)^{-\alpha_2} \left[x_1^{-\alpha_1} - (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \right],$$

$$|J_4| \leq C_{12} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \left[x_1^{-\alpha_1} - (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \right] \left[x_2^{-\alpha_2} - (x_2+h_2)^{-\alpha_2} \right],$$

$$|J_5| \leq C_{12} (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{h_1^{\lambda_1}}{(x_2+h_2-t_2)^{1+\alpha_2-\lambda_2}} dt_2,$$

$$|J_6| \leq C_{12} (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \int_0^{x_2} \frac{h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2}}{(x_2+h_2-t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2,$$

$$|J_7| \leq C_{12} \left[x_1^{-\alpha_1} - (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \right] \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{h_1^{\lambda_1}}{(x_2+h_2-t_2)^{1+\alpha_2-\lambda_2}} dt_2,$$

$$|J_8| \leq C_{12} (x_2+h_2)^{-\alpha_2} \int_{x_1}^{x_1+h_1} \frac{h_2^{\lambda_2}}{(x_1+h_1-t_1)^{1+\alpha_1-\lambda_1}} dt_1,$$

$$|J_9| \leq C_{12} (x_2+h_2)^{-\alpha_2} \int_0^{x_1} \frac{h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2}}{(x_1+h_1-t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1,$$

$$|J_{10}| \leq C_{12} \left[x_2^{-\alpha_2} - (x_2+h_2)^{-\alpha_2} \right] \int_{x_1}^{x_1+h_1} \frac{\left(\Delta_{x_1+h_1-t_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (t_1, 0)}{(x_1+h_1-t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1,$$

$$|J_{11}| \leq C_{12} h_1^{\lambda_1} (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \int_0^{x_2} (x_2-t_2)^{\lambda_2} \left[(x_2-t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2+h_2-t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_2,$$

$$|J_{12}| \leq C_{12} (x_2+h_2)^{-\alpha_2} h_2^{\lambda_2} \int_0^{x_1} (x_1-t_1)^{\lambda_1} \left[(x_1-t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1+h_1-t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1,$$

$$|J_{13}| \leq C_{12} \left[x_2^{-\alpha_2} - (x_2+h_2)^{-\alpha_2} \right] \int_0^{x_1} \frac{h_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}}{(x_1+h_1-t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1,$$

$$|J_{14}| \leq C_{12} x_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \left[x_1^{-\alpha_1} - (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \right] \int_0^{x_2} \frac{dt_2}{(x_2+h_2-t_2)^{1+\alpha_2}},$$

$$|J_{15}| \leq C_{12} x_1^{\lambda_1} \left[x_1^{-\alpha_1} - (x_1+h_1)^{-\alpha_1} \right] \int_0^{x_2} (x_2-t_2)^{\lambda_2} \left[(x_2-t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2+h_2-t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_2,$$

$$|J_{16}| \leq C_{12} x_2^{\lambda_2} \left[x_2^{-\alpha_2} - (x_2 + h_2)^{-\alpha_2} \right] \int_0^{x_1} (x_1 - t_1)^{\lambda_1} \left[(x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1,$$

$$|J_{17}| \leq C_{12} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{dt_1 dt_2}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}},$$

$$|J_{18}| \leq C_{12} h_1^{\lambda_1} \int_0^{x_1} \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{dt_1 dt_2}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1} (x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2-\lambda_2}},$$

$$|J_{19}| \leq C_{12} h_2^{\lambda_2} \int_{x_1}^{x_1+h_1} \int_0^{x_2} \frac{dt_1 dt_2}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1-\lambda_1} (x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}},$$

$$|J_{20}| \leq C_{12} h_1^{\lambda_1} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t_2)^{\lambda_2}}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} \left[(x_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2 + h_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_1 dt_2,$$

$$|J_{21}| \leq C_{12} h_2^{\lambda_2} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{(x_1 - t_1)^{\lambda_1}}{(x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} \left[(x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1 dt_2,$$

$$|J_{22}| \leq C_{12} \int_{x_1}^{x_1+h_1} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t_2)^{\lambda_2}}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1-\lambda_1}} \left[(x_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2 + h_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_1 dt_2,$$

$$|J_{23}| \leq C_{12} \int_0^{x_1} \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{(x_1 - t_1)^{\lambda_1}}{(x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2-\lambda_2}} \left[(x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} \right] dt_1 dt_2,$$

$$|J_{24}| \leq C_{12} \int_{x_1}^{x_1+h_1} \int_{x_2}^{x_2+h_2} \frac{dt_1 dt_2}{(x_1 + h_1 - t_1)^{1+\alpha_1-\lambda_1} (x_2 + h_2 - t_2)^{1+\alpha_2-\lambda_2}},$$

$$|J_{25}| \leq C_{12} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} (x_1 - t_1)^{\lambda_1} (x_2 - t_2)^{\lambda_2} \left[(x_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} - (x_1 + h_1 - t_1)^{-1-\alpha_1} \right] \left[(x_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} - (x_2 + h_2 - t_2)^{-1-\alpha_2} \right] dt_1 dt_2$$

Ushbu barcha hadlarni baholashda 1-lemma va 1-teoremlarning isbotidagi baholashlardan foydalansak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left| \left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \Psi \right) (x_1, x_2) \right| \leq C_{12} h_1^{\lambda_1 - \alpha_1} h_2^{\lambda_2 - \alpha_2}.$$

Xulosalar. Ikki o‘zgaruvchili funktsiyali Hölder fazolarida Marsho formasidagi aralash kasr tartibli hosila operatori xossalari o‘rganildi. Bu natijalardan shuni xulosa qilish mumkin, agar qaralayotgan operator (1) ko‘rinishda bo‘lsa, u holda ikki o‘zgaruvchili funktsiyalar uchun ham xuddi bir o‘zgaruvchili funktsiyalarda olingan teoremlarga o‘xshash teoremani olish mumkin ekan [11].

ADABIYOTLAR

1. N.K. Karapetiants and L.D. Shankishvili, A short proof of Hardy-Littewood-type theorem for fractional integrals in weighted Hölder spaces. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2(2), (1999), 177-192
2. V.A. Krasnov, Fractional derivatives of funnctions of several variables. [Russian] Kiev, (1976), 240-243
3. T. Mamatov, Mixed fractional integration in mixed weighted generalized Hölder spaces, *Case Studies Journal*, 7(6), (2018), 1-8
4. T. Mamatov, Mapping properties of mixed fractional differentiation operators in Hölder spaces defind by usual Hölder condition. *Journal of Computer Science and Compulational Mathematics*, 9(2), (2019), 103-102
5. T. Mamatov, Operators of Volterra convolution type in generalized Hölder spaces, *Poincare Journal of Analysis and Applications*, 7(2), (2020), 275-288
6. T. Mamatov and N. Mustafoev, Operators of Volterra convolution type in weighted generalized Hölder space, *Poincare Journal of Analysis and Applications*, 10(1), (2023), 135-154
7. T. Mamatov and S. Samko, Mixed fractioanl integration operators in mixed weighted Hölder spaces. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 13(3), (2010), 245-260
8. H. Rafeiro, S. Samko, Fractional integrals and derivatives: mapping properties, *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 19(3), (2016), 580-607.
9. B. Rubin, *Fractional Integrals and potentials*, Pitman. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. 82, (1996), 409-418.
10. S.G. Samko, *Hypersingular integrals and their applications*. [Russian] Rostov-on-Don, (1984), 280 pp.
11. S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon and Breach. Sci. Publ., N.York-London, (1993), 1012 pp.
12. Вакулов Б.Г., Кочуров Е.С. Операторы дробного интегрирования и дифференцирования переменного порядка в пространствах Гельдера $H(t,x)$ // *Владикавказский мат.журнал*, 2010, Т.12, №4, С. 3-11.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17696965>

ӘОЖ(УДК)

373.5:535.21

«ЖАРЫҚ ҚҰБЫЛЫСТАРЫ» ТАРАУЫН ОҚЫТУДА ДЕҢГЕЙЛЕП ТАПСЫРМАЛАРДЫ ҚҰРУ ЖӘНЕ ОРЫНДАУ НӘТИЖЕЛЕРІН ТАЛДАУ

АЗЫМ ГҮЛНҰР ҚАЙРАТҚЫЗЫ

1 курс магистранты

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қаласы

Аңдатпа. Бұл мақалада «Жарық құбылыстары» тарауын оқытуда деңгейлеп оқыту технологиясын қолдану ерекшеліктері қарастырылады. Деңгейлеп оқыту жүйесінің I, II, III және IV деңгейлері бойынша тапсырмаларды құрастыру принциптері мен үлгілері берілген. Сонымен қатар, тапсырмаларды орындау нәтижелері теориялық тұрғыда талданып, олардың оқушылардың танымдық белсенділігі мен шығармашылық қабілетін дамытудағы маңызы айқындалады. Зерттеу нәтижесі бойынша, деңгейлеп тапсырмалар жүйесін тиімді қолдану оқушылардың білім сапасын арттырып, пәнге деген қызығушылығын қалыптастыруға ықпал ететіні дәлелденеді.

Кілт сөздер: деңгейлеп оқыту, жарық құбылыстары, тапсырма құру, танымдық белсенділік, шығармашылық қабілет.

Аннотация. В данной статье рассматриваются особенности применения технологии уровневого обучения при изучении раздела «Явления света». Представлены принципы и примеры разработки заданий по уровням I, II, III и IV в системе уровневого обучения. Кроме того, теоретически проанализированы результаты выполнения заданий, выявлена их роль в развитии познавательной активности и творческих способностей учащихся. По результатам анализа установлено, что эффективное использование системы уровневых заданий способствует повышению качества знаний и формированию интереса к предмету.

Ключевые слова: уровневое обучение, явления света, составление заданий, познавательная активность, творческие способности.

Abstract. This article examines the features of using the differentiated (level-based) teaching technology in studying the topic «Light phenomena». The principles and examples of designing tasks for Levels I, II, III, and IV within the differentiated (leveled) learning system are presented. In addition, the results of task performance are theoretically analyzed, emphasizing their role in developing students' cognitive activity and creative abilities. The findings indicate that the effective use of a system of differentiated tasks contributes to improving the quality of students' knowledge and fostering interest in the subject.

Keywords: differentiated instruction, light phenomena, task design, cognitive activity, creative abilities.

Қазіргі білім беру жүйесі жаңа педагогикалық технологияларға негізделіп, оқыту процесін оқушы тұлғасына бағыттау талабын алдыңғы орынға қояды. Бүгінгі таңда білім алушылардың жеке қабілетін, танымдық белсенділігін және шығармашылық ойлау дағдыларын дамыту – оқу үдерісінің басты мақсатына айналып отыр.

Физика пәні – оқушылардың ғылыми дүниетанымын қалыптастыратын, қоршаған ортадағы құбылыстарды түсіндірудің негізі болып табылатын жаратылыстану ғылымдарының бірі. «Жарық құбылыстары» тарауы табиғаттағы және техникадағы жарықтың таралуы мен өзара әсерлесу заңдылықтарын түсіндіретін негізгі оқу мазмұнының бірі болып саналады. Бұл тарауды меңгеру барысында оқушылар жарықтың таралу, шағылу және сыну заңдарын зерттеп, оптикалық құралдардың жұмыс істеу принциптерін түсінеді.

Физика пәнінің «Жарық құбылыстары» тарауы табиғаттағы және техникадағы оптикалық процестердің заңдылықтарын түсіндіретін іргелі тарау болып табылады. Бұл тарауда жарықтың табиғаты, жарықтың түзу сызықты таралуы, көлеңке мен жартылай көлеңке, жарықтың шағылуы мен сынуы, айна және линза көмегімен кескін алу заңдылықтары сияқты негізгі физикалық ұғымдар қарастырылады.

8-сынып деңгейінде оқушылар жарықтың геометриялық қасиеттерін, яғни жарықтың түзу таралуы, шағылуы мен сынуы, айна мен линзада кескін түзілуін, оптикалық аспаптардың (лупа, микроскоп, телескоп) жұмыс принциптерін тәжірибелер арқылы меңгереді. Бұл сыныпта оқушылардың тәжірибелік дағдыларын қалыптастыру мен күнделікті өмірде жарық құбылыстарының қолданылуын түсіндіру басты мақсат болып табылады [1].

Орта білім берудің мазмұнын жаңарту үдерісі оқыту технологияларын жетілдіруді, сабақ барысында оқушылардың жеке ерекшеліктерін ескеруді және оқу процесін дараландыруды талап етеді. Осы тұрғыдан алғанда, оқытудың жаңа педагогикалық технологияларының бірі ретінде деңгейлеп оқыту технологиясы ерекше мәнге ие. Бұл технология оқушының жеке даму қарқынын, танымдық қабілеттерін және білімді игеру мүмкіндігін ескере отырып, оқу материалын меңгерудің тиімді жолын ұсынады.

Деңгейлеп оқыту технологиясы – әрбір оқушының танымдық мүмкіндігін, білім деңгейін және оқу уәжін ескере отырып, білім мазмұнын кезең-кезеңмен, күрделілік деңгейіне сай меңгертуге бағытталған педагогикалық жүйе. Бұл тәсіл оқушылардың белсенділігін арттырып, оқытудың даралануын қамтамасыз етеді. «Жарық құбылыстары» тарауын деңгейлеп оқыту технологиясы арқылы ұйымдастыру тек оқушылардың физикалық білімін бекітіп қана қоймай, олардың танымдық дербестігін, шығармашылық белсенділігін, зерттеушілік қабілетін дамытуға бағытталады. Деңгейлік тапсырмалар жүйесі оқушының өздігінен ізденуіне, ой қорытуына және білімін практикалық жағдайда қолдануына жол ашады. Қазіргі білім беру жүйесінің басты мақсаты – оқушылардың жеке қабілеттерін дамыта отырып, оларды өздігінен білім алуға, шығармашылық тұрғыда ойлауға бейімдеу. Бұл міндетті жүзеге асыруда педагогика ғылымында қалыптасқан жаңа технологиялардың ішінде деңгейлеп оқыту технологиясы ерекше мәнге ие [2].

Зерттеуші Ж.А. Қараев ұсынған деңгейлеп-саралап оқыту технологиясы оқушылардың білімін меңгеру деңгейіне сәйкес төрт сатылы құрылымда ұйымдастыруды көздейтін педагогикалық жүйе болып табылады.

1. Репродуктивтік деңгей – оқушының білімді дайын күйінде қабылдап, қайта жаңғыртуы. Бұл сатыда негізгі ұғымдар, анықтамалар мен заңдар меңгеріледі.

2. Алгоритмдік деңгей – белгілі бір үлгі немесе алгоритм бойынша әрекет ету. Оқушы заңдар мен формулаларды есептер шығаруда қолдана алады.

3. Эвристикалық деңгей – оқушының өз бетімен ізденіп, жаңа білімді өз тәжірибесі арқылы игеруі. Мұнда талдау, салыстыру, қорытынды жасау дағдылары дамиды.

4. Шығармашылық деңгей – зерттеу, модельдеу, тәжірибе жасау арқылы жаңа нәтижелерге қол жеткізу кезеңі.

Бұл жүйенің педагогикалық мәні – әрбір оқушының оқу процесіндегі жеке білім алу бағытын айқындап, оны жүйелі дамытуында. Яғни, әркім өз мүмкіндігіне сай деңгейден бастап, жоғары деңгейге көтерілуге ұмтылады. Деңгейлеп оқыту технологиясы оқушылардың танымдық белсенділігін арттырумен қатар, мұғалімнің жұмысын да жүйелейді. Мұғалім әр оқушының оқу жетістігін нақты деңгей бойынша бағалай алады, нәтижесінде бағалау әділ әрі объективті сипат алады. Физика сабағында бұл технологияны қолдану оқу процесін жандандырып, оқушылардың танымдық белсенділігін арттырады. Әр деңгейдегі тапсырмалар жүйелі түрде ұйымдастырылған жағдайда оқушылардың пәнге деген қызығушылығы тұрақтанады, өздігінен жұмыс жасау дағдылары қалыптасады.

Деңгейлеп оқыту технологиясының тиімділігін төмендегідей аспектілер арқылы сипаттауға болады:

- оқыту процесінің даралануы мен саралануын қамтамасыз етеді;

ОФ “Международный научно-исследовательский центр “Endless Light in Science”

- оқушылардың білімді меңгеруін диагностикалауға мүмкіндік береді;
- мұғалім мен оқушы арасындағы кері байланысты нығайтады;
- оқу жетістіктерін нақты деңгей бойынша бақылауға жағдай жасайды [3].

«Жарық құбылыстары» тарауын оқытуда деңгейлеп тапсырмалар құру – оқушылардың білімін жүйелі меңгеруін қамтамасыз ететін әдістемелік құрал болып табылады. Деңгейлік тапсырмаларды құру кезінде бірнеше негізгі педагогикалық принциптерді сақтау қажет:

1. Бағдарламалық сәйкестілік: тапсырмалар оқу бағдарламасында көрсетілген оқу мақсаттары мен талаптарға сәйкес болуы тиіс.

2. Күрделілік дәрежесінің біртіндеп өсуі: тапсырмалар деңгейлер бойынша жеңілден күрделіге қарай ұйымдастырылуы, оқушының қабілетіне сай білімді меңгеруге мүмкіндік беруі қажет.

3. Теория мен практика байланысы: әрбір тапсырма теориялық ұғымды практикалық тәжірибемен бекітуге бағытталуы керек.

4. Танымдық белсенділікті арттыру: тапсырмалар оқушыны өздігінен ізденуге, қорытынды жасауға және шығармашылық әрекетке ынталандыруы қажет.

5. Оқушының жеке ерекшеліктерін ескеру: тапсырмалар оқушының білім деңгейі мен оқу қабілетіне сәйкес құрылуы керек [4].

«Жарық құбылыстары» тарауы бойынша деңгейлік тапсырмалар:

(I нұсқа)

I деңгей (репродуктивтік)

Мақсаты: негізгі ұғымдар мен анықтамаларды есте сақтау, қарапайым сұрақтарға жауап беру

1. Жарық дегеніміз не? Түсіндіріңіз.

2. Жарықтың түзу сызықпен таралуын тәжірибеде көрсетуге болады ма? Қысқаша сипаттаңыз.

3. Айнадағы шағылу заңын тұжырымдаңыз.

4. Линза дегеніміз не? Қысқаша анықтама беріңіз.

5. Жарықтың негізгі қасиеттерін атаңыз.

II деңгей (алгоритмдік)

Мақсаты: белгілі алгоритм бойынша есеп шығару, тәжірибе жасау

1. Айнаға түскен сәулелің түсу бұрышы 40° болса, шағылу бұрышын есептеңіз.

2. Фокус арақашықтығы 15 см болатын жинайтын линза арқылы кескіннің орнын анықтаңыз, егер зат линзадан 30 см қашықтықта тұрса.

3. Айна мен жарық сәулесі арқылы кескіннің көлемін салыстырыңыз: қандай жағдайда кескін үлкейеді?

4. Жарық сәулесінің сыну бұрышын тәжірибе арқылы анықтаңыз (су немесе шыны ыдысты пайдаланып).

5. Лупа арқылы кескінді үлкейту жағдайын салыстырмалы түрде сипаттаңыз.

III деңгей (эвристикалық)

Мақсаты: жаңа жағдайларда білімді қолдану, қорытынды жасау, талдау

1. Линза көмегімен алынған кескін нақты немесе көлеңкелі болуын анықтаңыз.

2. Айна және линза көмегімен алынған кескінді салыстырып, айырмашылықтарын сипаттаңыз.

3. Жарық сәулесінің суда немесе әйнекте сыну бұрышын тәжірибеде өлшеп, алынған нәтижелер бойынша қорытынды жасаңыз.

4. Күнделікті өмірде жарықтың шағылуына үш мысал келтіріңіз.

5. Жарық сәулесінің сыну заңын практикалық есепке (жарықтандыру құралдарын орналастыру, оптикалық құрылғылар) қолдану жолдарын талдаңыз.

IV деңгей (шығармашылық / зерттеушілік)

Мақсаты: зерттеу жүргізу, тәжірибе жасау, жаңа нәтижеге жету

1. «Жарықтың сынуы» тақырыбында шағын эксперимент жасап, нәтижесін суретпен және қорытындысымен баяндаңыз.
2. Айна мен линзаны қолдана отырып, өзіңіздің шағын оптикалық құрылғыңызды жобалаңыз (мысалы, телескоп немесе камера объективі).
3. Оптикалық аспаптардың күнделікті өмірдегі қолданылуын зерттеу жобасын дайындаңыз және қорғаңыз.
4. Жарықтың түзу таралуы мен шағылуын қолдана отырып, бөлмені жарықтандыру сызбасын жобалаңыз.
5. Жарықтың сыну құбылысын тәжірибе арқылы зерттеп, алынған нәтижелер негізінде есеп құрастыру.

II нұсқа

I деңгей (репродуктивтік)

Мақсаты: негізгі ұғымдар мен заңдарды есте сақтау, анықтамаларды меңгеру

1. Жарық көздері қандай түрлерге бөлінеді? Әрқайсысына мысал келтіріңіз.
2. Жарықтың шағылуы мен сынуының айырмашылығын түсіндіріңіз.
3. Жарықтың таралу бағытын сипаттайтын сызықты не деп атайды?
4. Айна түрлерін атаңыз және олардың қолданылу салаларын көрсетіңіз.
5. Линзаның оптикалық осі дегеніміз не?

II деңгей (алгоритмдік)

Мақсаты: белгілі алгоритм бойынша есеп шығару, заңдылықтарды қолдану

1. Айнаға түскен сәуленің түсу бұрышы 35° болса, шағылу бұрышы қандай болады?
2. Зат линзадан 20 см қашықтықта орналасқан. Егер линзаның фокус арақашықтығы 10 см болса, кескіннің орнын табыңыз.
3. Күн сәулесінің түсу бұрышы өзгергенде көлеңке ұзындығы қалай өзгереді? Тәжірибе арқылы дәлелдеңіз.
4. Су мен әйнектегі жарықтың сыну бұрышын салыстырып, айырмашылығын анықтаңыз.
5. Айна мен линза арқылы алынған кескіннің түрін анықтауға арналған тәжірибенің жоспарын жазыңыз.

III деңгей (эвристикалық)

Мақсаты: білімді жаңа жағдайда қолдану, себеп-салдарлық байланыс орнату

1. Жарық сәулесінің түсу бұрышы өзгерсе, шағылу бұрышы қалай өзгереді? Тәжірибеден мысал келтіріңіз.
2. Линзаның түріне байланысты (жинайтын, шашыратқыш) кескіннің қасиеттерін салыстырыңыз.
3. Неліктен жарық су мен әйнекте баяу тарайды?
4. Жарықтың түзу таралуын тұрмыста қолдануға мысал келтіріңіз (сәулелендіру, көлік шамдары, прожектор).
5. Күн сағатының жұмыс принципін жарықтың қасиеттерімен байланыстырып талдаңыз.

IV деңгей (шығармашылық / зерттеушілік)

Мақсаты: зерттеу, модельдеу және шығармашылық ойлау дағдыларын дамыту

1. «Жарықтың шағылу заңы» тақырыбында тәжірибе жасап, фотосурет немесе бейне түрінде нәтижесін ұсыныңыз.
2. Үй жағдайында жарықтың түзу таралуын дәлелдейтін құрылғы (мысалы, қағаз түтіктер мен шам) жасаңыз және нәтижесін сипаттаңыз.
3. Айна мен линза арқылы қарапайым микроскоп немесе перископ моделін құрастырыңыз.
4. Жарық құбылыстарын зерттеп, олардың табиғатын және қолданылу мүмкіндіктерін ғылыми тұрғыдан талдайтын зерттеу жобасын дайындаңыз.

5. «Оптикалық аспаптар – тұрмыста және ғылымда» тақырыбында шағын баяндама немесе презентация дайындаңыз [5].

«Жарық құбылыстары» тарауын деңгейлеп оқыту технологиясы негізінде ұйымдастырудың тиімділігі тапсырмаларды орындау барысын теориялық тұрғыда талдау арқылы айқындалады. Деңгейлеп берілген тапсырмалар оқушылардың оқу белсенділігін арттырып, білім сапасының артуына ықпал етеді. Деңгейлік тапсырмалар жүйесін қолдану барысында педагогикалық нәтижелер 1-кестеде көрсетілген.

№	Талдау бағыты	Теориялық талдау мазмұны	Күтілетін нәтижелер
1	Білімнің жүйелілігі мен беріктігі	Деңгейлік тапсырмаларды орындау арқылы оқушылар негізгі заңдар мен ұғымдарды қайталай отырып, білімін жүйелі түрде бекітеді. Әр деңгейде жаңа мазмұн бұрынғы біліммен байланыстырылып, тұтас түсінік қалыптасады.	Физикалық ұғымдарды саналы меңгеру, заңдылықтарды түсініп қолдану дағдылары дамиды.
2	Танымдық белсенділік	Деңгейлік тапсырмалар оқушыларды белсенді ойлануға, ізденуге және өздігінен қорытынды жасауға жетелейді. Теориялық сұрақтар мен өмірмен байланысты тапсырмалар қызығушылық тудырады.	Сабаққа қатысу белсенділігі артады, пәнге қызығушылық артады.
3	Жеке ерекшеліктерді ескеру	Әр оқушы өз мүмкіндігі мен оқу қарқынына сәйкес тапсырма орындай алады. Бұл тәсіл үлгерімі әртүрлі оқушылардың тең қатысуын қамтамасыз етеді.	Барлық оқушылардың білім алу процесіне қатысуы, өз деңгейіне сай жетістікке жетуі.
4	Өзіндік жұмыс және жауапкершілік	Тапсырмаларды өздігінен орындау арқылы оқушылар дербестікке үйренеді, жауапкершілігі мен оқу уәжі артады. Мұғалім бағыттаушы рөлде болады.	Оқушылардың өздігінен шешім қабылдау, талдау және қорытынды жасау қабілеттері қалыптасады.
5	Ойлау және талдау дағдылары	«Жарық құбылыстары» тарауы бойынша тапсырмалар оқушыларды себеп-салдарлық байланыс орнатуға, физикалық құбылыстарды түсіндіруге үйретеді.	Логикалық, аналитикалық және сыни ойлау қабілеттері дамиды.
6	Уәж және қызығушылық	Деңгейлік тапсырмалар арқылы оқушы өз жетістігін бақылай алады. Әр деңгейдің орындалуы ынталандыру әсерін тудырады.	Ішкі уәждің артуы, пәнге тұрақты қызығушылықтың қалыптасуы.

1-кесте. Педагогикалық нәтижелер

Тапсырмалардың деңгейге бөлінуі оқушыларға өз жетістігін бақылауға мүмкіндік береді. Әрбір деңгейдің табысты орындалуы келесі сатыға өтуде ынталандыру тудырады, нәтижесінде оқушыларда пәнге деген қызығушылық тұрақты түрде қалыптасады.

Осылайша, тапсырмаларды орындау нәтижелерін педагогикалық тұрғыдан талдау көрсеткендей, деңгейлеп оқыту технологиясы оқушылардың танымдық, шығармашылық және логикалық қабілеттерін дамытуда тиімді құрал болып табылады. Бұл тәсіл сабақтың

құрылымын жүйелеп, білім сапасын арттыруға, сондай-ақ оқу процесін оқушының жеке ерекшелігіне бейімдеуге мүмкіндік береді [6].

Қорытындылай келе, «Жарық құбылыстары» тарауын деңгейлеп оқыту технологиясы негізінде ұйымдастыру оқушылардың білімді жүйелі меңгеруіне, танымдық белсенділіктің артуына және жеке ерекшеліктерін ескеріп оқытуға кең мүмкіндік беретіні анықталды. Зерттеу барысында құрастырылған I–IV деңгей тапсырмалары оқу үдерісін тиімді дараландыруға, оқушының білімді дайын күйде қабылдауынан бастап, шығармашылық және зерттеушілік әрекетке көтерілуіне жағдай жасайды. Теориялық талдау нәтижелері деңгейлік тапсырмалардың физикалық ұғымдарды терең түсіндіруге, заңдылықтарды саналы меңгеруге және оларды практикалық жағдайларда қолдануға ықпал ететінін көрсетті. Сонымен қатар, тапсырмаларды кезең-кезеңмен орындату оқушылардың өздігінен білім алу дағдыларын қалыптастырып, жауапкершілігін арттырады, ғылыми ойлау мен талдау дағдыларын дамытады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ:

1. Қазақстан Республикасының Оқу-ағарту министрлігі. Жалпы орта білім берудің мемлекеттік жалпыға міндетті стандарты (ЖМБС). – Астана, 2022. – <https://adilet.zan.kz/rus/docs/V2200029767>
2. Бөрібекова Ф.Б., Жанатбекова Н.Ж. Қазіргі заманғы педагогикалық технологиялар: Оқулық. – Алматы: 2014. – 360 б.
3. Караев Ж.А., Кобдикова Ж.У. Технология трехмерной методической системы обучения: сущность и применение. – Алматы, Зерде, 2018г., – 480 с.
4. Жүсіпқалиева Ғ.Қ., Джумашева А.А., Құбаева Б.С. Мектепте физика курсын оқытудың теориясы мен әдістемесі. Оқу құралы. Орал: М.Өтемісов атындағы БҚМУ редакциялық баспа орталығы, 2012. – 195
5. Кронгарт Б.А., Насохова Ш.Б. Физика. Жалпы білім беретін мектептің 8-сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Мектеп, 2018. – 232 б.
6. Құдайқұлов М. Ә., Жаңабергенов Қ. Орта мектепте физиканы оқыту әдістемесі. – Алматы: Рауан, 1998. – 216 б.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17697006>

ARALASH UZLUKSIZLIK MODULI BILAN ANIQLANGAN UMUMLASHGAN HÖLDER FAZOSIDA VOLTER O'RAMASI MA'NOSIDAGI OPERATORLAR

UMAROV ALOVIDDIN OCHILOVICH

f.-m.f.f.d (PhD), dotsent, Buxoro davlat texnika universiteti, Buxoro, O'zbekiston

Annotatsiya. Aralash uzluksiz moduli bilan aniqlangan ikki o'zgaruvchili funksiyalarning umumlashgan Hölder fazosida Volter o'ramasi ma'nosidagi aralash integral operatorning xossalari o'rganilgan.

Kalitli so'zlar: ikki o'zgaruvchili funktsiya, Volter o'ramasi, integral operator, umumlashgan Hölder fazosi, aralash chekli ayirma.

OPERATORS IN THE SENSE OF VOLTERRA IN THE GENERALIZED HÖLDER SPACE DEFINED BY THE MIXED CONTINUITY MODULUS

Abstract. The action of the mixed integral operator of the Volterra convolution type in the generalized Hölder space of functions of two variables defined by the mixed modulus of continuity is studied.

Keywords: functions of two variables, generalized Hölder space, Volterra convolution type integral, mixed integral operator, mixed finite differences.

Kirish. Jahon miqyosida olib borilayotgan ilmiy va amaliy tadqiqotlarning salmoqli qismi, maxsus (singulyar) integral operatorlari amaliy xarakterdagi ko'plab muhim masalalarni, xususan, analitik funksiyalarning chegaraviy masalalarini, chiziqli va chiziqli bo'lmagan maxsus (singulyar) integral tenglamalarni yechishda uchraydi. Fazolardagi integral operatorlar nazariyasining eng muhim muammolaridan biri obraz silliqilgining proobrazining silliqilgiga bog'liqligini aniqlash muammosidir. Bunday masalani yechish integral tenglamalarning yechilishi, ularning barqarorligi va hokazolarda muhim rol o'ynaydi. Silliqlik tushunchasi turli atamalar bilan ifodalanishi mumkin. Funksiyaning silliqililik xossalari juda nozik tushunish usullaridan biri bu uzluksizlik modulining hatti-harakati nuqtai nazaridan shakllantirilgan umumlashgan Hölder xossasi tushunchasidan foydalanishdir. Bir o'zgaruvchili umumlashgan Hölder funksiyalar fazolarida bunday masalalar deyarli to'liq o'rganilgandir [2]-[8].

Ko'p o'zgaruvchili fuksiyalar fazosida bunday masalalar deyarli o'rganilmagan [9]-[15]. Biz aralash Volter o'ramasi ma'nosidagi integral operatorning xossalari ikki o'zgaruvchili umumlashgan Hölder funksiyalar fazosida qaradik. Ushbu maqolamizda bir o'zgaruvchili holda olingan natijalarga o'xshash yoki aynan shunday natijalarni olish mumkin yoki mumkin emasligini o'rgandik.

Materiallar va metodlar. Hozirgi vaqtda fan, texnika, iqtisodiyot va inson faoliyatining boshqa sohalarida, ayniqsa, elastiklik nazariyasi va kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasida matematik usullar va kompyuter modellash tirishlardan foydalanish jadallik bilan kengaymoqda. Umumlashgan Hölder fazolarida kasr tartibli integro-differensiallashtirishni o'rganishning muhim bosqichi bu Zigmund ma'nosidagi baholarni olishdir, ya'ni asl funksiyaning uzluksizlik moduli orqali kasr tartibli integrallarning uzluksizlik modulini baholash tushiniladi.

Uzluksizlik moduli bilan aniqlangan bir o'zgaruvchili Volter o'ramasi ma'nosidagi integralning Zigmund ma'nosidagi bahosini olish usulidan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o'zgaruvchili Volter o'ramasi ma'nosidagi aralash integralning Zigmund ma'nosidagi baholarini olamiz. So'ngra olingan Zigmund ma'nosidagi baholardan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o'zgaruvchili funksiyalarning umumlashgan Hölder fazolarini

akslantiruvchi Volter o'ramasi ma'nosidagi aralash integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

1-ta'rif [1]. Agar $\omega(\sigma)$ ($0 < \sigma \leq l_0 = b - a$) funksiya quyidagi

- 1) $\omega(0) = 0$;
 - 2) $\omega(\sigma)$ σ ning kamaymaydigan funksiyasi;
 - 3) $\omega(\sigma)$ yarim additiv, ya'ni $\omega(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \omega(\sigma_1) + \omega(\sigma_2)$;
 - 4) $\omega(\sigma)$ $[0, b - a]$ da σ ning uzluksiz funksiyasi
- shartlarni qanoatantirsa, u holda bu funksiya uzluksiz moduli deyiladi.

2-ta'rif [1]. Agar $(0, b - a]$ oraliqda aniqlangan $\omega(\sigma)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,

a) $\omega(\sigma)$ uzluksizlik modul funksiyasi;

$$b) \int_0^\sigma \frac{\omega(t)}{t} dt \leq C_1 \omega(\sigma);$$

$$c) \sigma \int_\sigma^{b-a} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq C_1 \omega(\sigma);$$

$$d) \omega'(\sigma) \sim \frac{\omega(\sigma)}{\sigma},$$

u holda bu funksiya Φ^1 sinfga qarashli deyiladi.

2-ta'rif ([8]). $[0, l]$ da aniqlangan $k(x)$ musbat funktsiyani $V_\lambda, \lambda > 0$ sinfga qarashli deymiz, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

- 1) $k(x) \neq 0$, $x^\lambda k(x)$ - deyarli o'suvchi va $x^\lambda k(x)|_{x=0} = 0$;
- 2) shunday $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \lambda$ mavjudki, $x^{\lambda-\varepsilon} k(x)$ - deyarli kamayuvchi bo'ladi;
- 3) shunday C_1 mavjudki

$$\left| \frac{k(x) - k(y)}{x - y} \right| \leq C_1 \frac{k(x^*)}{x^*}, \text{ bunda } x^* = \max(x, y).$$

$\varphi(x_1, x_2)$ uzluksiz funksiya $Q \subset \mathbb{R}^2$, $Q = \{(x_1, x_2) : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$ da aniqlangan bo'lsin. Quyida zarur belgilashlarni kiritamiz

$$\left(\Delta_{h_1}^{1,0} \varphi \right)(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + h_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2), \quad (1)$$

$$\left(\Delta_{h_2}^{0,1} \varphi \right)(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2 + h_2) - \varphi(x_1, x_2),$$

$$\left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right)(x_1, x_2) = \varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \varphi(x_1 + h_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2 + h_2) + \varphi(x_1, x_2). \quad (2)$$

Ikki o'zgaruvchili uzluksiz funktsiyalarning xossalarini o'rganishda biz quyidagi funktsiyalar sinfini qaraymiz [10]:

$$\tilde{H}^\varpi = H^{\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1}} = \left\{ \varphi(x, y) \in C(Q) : \begin{aligned} &\omega_\varphi^{1,0}(\sigma_1, 0) = O(\omega_1(\sigma_1)), \\ &\omega_\varphi^{0,1}(0, \sigma_2) = O(\omega_2(\sigma_2)), \quad \omega_\varphi^{1,1}(\sigma_1, \sigma_2) = O(\omega_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2)) \end{aligned} \right\},$$

Bunda

- 1) birinchi tartibli xususiy modul uzluksizliklar

$$\omega_{\varphi}(\sigma_1, 0) := \sup_{x_2 \in [a_2, b_2]} \sup_{0 < h_1 \leq \sigma_1} \left| \left(\Delta_{h_1}^{1,0} \varphi \right) (x_1, x_2) \right|, \quad 0 < \sigma_1 \leq b_1 - a_1;$$

$$\omega_{\varphi}(0, \sigma_2) := \sup_{x_1 \in [a_1, b_1]} \sup_{0 < h_2 \leq \sigma_2} \left| \left(\Delta_{h_2}^{0,1} \varphi \right) (x_1, x_2) \right|, \quad 0 < \sigma_2 \leq b_2 - a_2;$$

2) 1,1-tartibli aralash modul uzluksizlik

$$\omega_{\varphi}(\sigma_1, \sigma_2) := \sup_{x_i \in [a_i, b_i]} \sup_{0 < h_i \leq \sigma_i} \left| \left(\Delta_{h_1, h_2}^{1,1} \varphi \right) (x_1, x_2) \right|, \quad 0 < \sigma_i \leq b_i - a_i, \quad i = 1, 2.$$

3-ta’rif. Ikki o‘zgaruvchili funksiya $\omega(\sigma_1, \sigma_2)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirsa

1) tayinlangan σ_2 uchun σ_1 o‘zgaruvchi bo‘yicha $\omega(\sigma_1, \sigma_2) \in \Phi^1$;

2) tayinlangan σ_1 uchun σ_2 o‘zgaruvchi bo‘yicha $\omega(\sigma_1, \sigma_2) \in \Phi^1$,

u holda bu funksiya $\Phi^{1,1}(Q)$ sinfga qarashli deyiladi.

Bu sinfni ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning birinchi tartibli aralash uzluksizlik modullari sinfi deb ataymiz.

4-ta’rif. Agar quyidagi

1) $\omega_1(\sigma_1), \omega_2(\sigma_2) \in \Phi^1$ va $\omega_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2) \in \Phi^{1,1}$;

2) $\omega_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2) \leq C_{12} \min\{\omega_1(\sigma_1), \omega_2(\sigma_2)\}$,

bu yerda C_{12} – $\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1}$ larga bog‘liq emas, shartlarni qanoatlantiradigan $\varpi = (\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})$ uchliklar to‘plamini $\Phi(Q)$ orqali belgilaymiz.

5-ta’rif. $\omega(\sigma_1, \sigma_2) \in \Phi(Q)$ bo‘lsin. Agar $\varphi(x_1, x_2)$ funksiya Q to‘plamda aniqlangan va

$$\sup_{0 < \sigma_1 \leq b_1 - a_1} \frac{\omega_{\varphi}(\sigma_1, 0)}{\omega_1(\sigma_1)} < \infty, \quad \sup_{0 < \sigma_2 \leq b_2 - a_2} \frac{\omega_{\varphi}(0, \sigma_2)}{\omega_2(\sigma_2)} < \infty$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda bu funksiya $H^{(\omega_1, \omega_2)}(Q) = H^{\omega}(Q)$ sinfga tegishli deyiladi.

Ushbu $\omega_1(\sigma_1)$ va $\omega_2(\sigma_2)$ funksiyalarni $H^{(\omega_1, \omega_2)}(Q)$ umumlashgan Hölder fazoning xarakteristik funksiyalari deb ataymiz.

6-ta’rif. Agar $\varphi(x_1, x_2) \in H^{(\omega_1, \omega_2)}(Q)$ bo‘lib,

$$\sup_{\substack{0 < \sigma_i \leq b_i - a_i \\ i=1,2}} \frac{\omega_{\varphi}(\sigma_1, \sigma_2)}{\omega_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2)} < \infty$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $\varphi(x_1, x_2)$ funksiya $\tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q) = \tilde{H}^{\varpi}(Q)$ sinfga tegishli deyiladi.

Ushbu $\omega_{1,1}(\sigma_1, \sigma_2)$ funksiyani $\tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q)$ aralash umumlashgan Hölder fazosining xarakteristik funksiyalari deb ataymiz.

$(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1}) \in \Phi$ xarakteristikalar bilan Q to‘rtburchakning chegaraviy nuqtalarida nolga aylanadigan, $\tilde{H}^{\varpi}(Q) = \tilde{H}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q)$ fazodan olingan $\varphi(x_1, x_2)$ funksiyalar qism fazosini $\tilde{H}_0^{\varpi}(Q) = \tilde{H}_0^{(\omega_1, \omega_2, \omega_{1,1})}(Q)$ orqali belgilamiz.

Natijalar. Aralash Volter o‘ramasi ma’nosidagi integral operatori quyidagicha berilgan bo‘lsin

$$(\tilde{K}\varphi)(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} k(x_1 - t_1) k(x_2 - t_2) \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad a_i < x_i, \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

1-teorema [10]. $k(x_i) \in V_{\lambda_i}$, $0 < \lambda_i < 1$, $\varphi(x_1, x_2)|_{x_i=a_i} = 0$ va $\varphi(x_1, x_2) \in C(Q)$ $i = 1, 2$, bo'lsa, u holda quyidagi Zigmund ma'nosidagi baholar o'rinli:

$$\begin{aligned} \omega^{1,0}(\tilde{K}\varphi; h_1, 0) &\leq C_1 \left[h_1 k(h_1) \omega^{1,1}(\varphi; h_1, b_2 - a_2) + h_1 \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \frac{\omega^{1,1}(\varphi; t_1, b_2 - a_2)}{t_1} k(t_1) dt_1 \right], \\ \omega^{0,1}(\tilde{K}\varphi; 0, h_2) &\leq C_2 \left[h_2 k(h_2) \omega^{1,1}(\varphi; b_1 - a_1, h_2) + h_2 \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega^{1,1}(\varphi; b_1 - a_1, t_2)}{t_2} k(t_2) dt_2 \right], \\ \omega^{1,1}(\tilde{K}\varphi; h_1, h_2) &\leq C_{12} \left[h_1 k(h_1) h_2 k(h_2) \omega^{1,1}(\varphi; h_1, h_2) + \right. \\ &+ h_1 h_2 k(h_2) \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \frac{\omega^{1,1}(\varphi; t_1, b_2 - a_2)}{t_1} k(t_1) dt_1 + h_1 h_2 k(h_1) \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega^{1,1}(\varphi; b_1 - a_1, t_2)}{t_2} k(t_2) dt_2 + \\ &\left. + h_1 h_2 \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega^{1,1}(\varphi; t_1, t_2)}{t_1 t_2} k(t_1) k(t_2) dt_1 dt_2 \right]. \end{aligned}$$

Ushbu teorema isbotini keltirmaymiz, uning isbotini [10] ko'rish mumkin.

Ushbu teoremadagi Zigmund ma'nosidagi baholardan foydalanib, aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o'zgaruvchili funksiyalarning umumlashgan Hölder fazolarini akslantiruvchi Volter o'ramasi ma'nosidagi aralash integral operatorning chegaralanganligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

2-teorema. Agar $k(x_i) \in V_{\lambda_i}$, $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2$ va

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \frac{\omega(\varphi; t_1, t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 &\leq C_{12} \omega(\varphi; h_1, h_2), \\ 2) \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \int_{h_2}^{b_2 - a_2} k(t_1) k(t_2) \frac{\omega(\varphi; t_1, t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 &\leq C_{12} k(h_1) k(h_2) \omega(\varphi; h_1, h_2). \end{aligned}$$

bo'lsa, u holda $\tilde{H}_0^\varpi$ fazoni $\tilde{H}_0^{\varpi_k}$ fazoga $\varpi_k(h_1, h_2) = h_1 h_2 k(h_1) k(h_2) \omega(h_1, h_2)$ xarakteristikasi bilan akslantiruvchi $\tilde{K}$ aralash integral operator chegaralangan bo'ladi.

Isbot. $f(x_1, x_2) := (\tilde{K}\varphi)(x_1, x_2)$ bo'lsin, bunda $\varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}_0^\varpi(Q)$. Agar $f(x_1, x_2)|_{x_i=a_i} = 0$, $i = 1, 2$ va

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t_1 \leq b_1 - a_1} \frac{\omega^{1,0}(f; t_1, 0)}{t_1 k(t_1) \omega_1(t_1, 0)} < \infty, \quad \sup_{0 < t_2 \leq b_2 - a_2} \frac{\omega^{0,1}(f; 0, t_2)}{t_2 k(t_2) \omega_2(0, t_2)} < \infty, \\ \sup_{\substack{0 < t_1 \leq b_1 - a_1 \\ 0 < t_2 \leq b_2 - a_2}} \frac{\omega^{1,1}(f; t_1, t_2)}{t_1 t_2 k(t_1) k(t_2) \omega_{1,1}(t_1, t_2)} < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

bo'lsa, $f(x_1, x_2) \in \tilde{H}_0^{\varpi_k}$ ekanli isbotlash yetarli.

$\varphi(x_1, x_2) \in \tilde{H}_0^\varpi(Q)$ bo'lgani uchun 1-teoremadan foydalanish mumkin. Ushbu teoreмага ko'ra integral (3) uchun Zigmund ma'nosidagi baholar o'rinli.

Teoremaning sharti va Zigmund ma'nosidagi baholardan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_f^{1,0}(h_1, 0)}{h_1 k(h_1) \omega_1(h_1)} &\leq C_1 \left(\frac{\omega_\phi^{1,1}(h_1, b_2 - a_2)}{\omega_1(h_1)} + \frac{1}{k(h_1) \omega_1(h_1)} \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \frac{\omega_\phi^{1,1}(t_1, b_2 - a_2)}{t_1} k(t_1) dt_1 \right) \leq \\
 &\leq C_1 \left(\frac{\omega_\phi^{1,0}(h_1, 0)}{\omega_1(h_1)} + \frac{1}{k(h_1) \omega_1(h_1)} \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \frac{\omega_\phi^{1,0}(t_1, 0)}{t_1} k(t_1) dt_1 \right) \leq \\
 &\leq C_1 \|\phi\|_{\tilde{H}_0^\sigma} \left(\frac{\omega_1(h_1)}{\omega_1(h_1)} + \frac{1}{k(h_1) \omega_1(h_1)} \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \frac{\omega_1(t_1)}{t_1} k(t_1) dt_1 \right) \leq \\
 &\leq C_1 \|\phi\|_{\tilde{H}_0^\sigma} \left(\frac{\omega_1(h_1)}{\omega_1(h_1)} + \frac{k(h_1) \omega_1(h_1)}{k(h_1) \omega_1(h_1)} \right) = 2C_1 \|\phi\|_{\tilde{H}_0^\sigma}, \\
 \frac{\omega_f^{0,1}(0, h_2)}{h_2 k(h_2) \omega_2(h_2)} &\leq C_2 \left(\frac{\omega_\phi^{1,1}(b_1 - a_1, h_2)}{\omega_2(h_2)} + \frac{1}{k(h_2) \omega_2(h_2)} \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega_\phi^{1,1}(b_1 - a_1, t_2)}{t_2} k(t_2) dt_2 \right) \leq \\
 &\leq C_2 \left(\frac{\omega_\phi^{0,1}(0, h_2)}{\omega_2(h_2)} + \frac{1}{k(h_2) \omega_2(h_2)} \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega_\phi^{0,1}(0, t_2)}{t_2} k(t_2) dt_2 \right) \leq C_2 \|\phi\|_{\tilde{H}_0^\sigma}, \\
 \frac{\omega_f^{1,1}(h_1, h_2)}{h_1 k(h_1) h_2 k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} &\leq C_{12} \left(\frac{\omega_\phi^{1,1}(h_1, h_2)}{\omega_{1,1}(h_1, h_2)} + \right. \\
 &+ \frac{1}{k(h_1) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \frac{\omega_\phi^{1,1}(t_1, h_2)}{t_1} k(t_1) dt_1 + \frac{1}{k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega_\phi^{1,1}(h_1, t_2)}{t_2} k(t_2) dt_2 + \\
 &\left. + \frac{1}{k(h_1) k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega_\phi^{1,1}(t_1, t_2)}{t_1 t_2} k(t_1) k(t_2) dt_1 dt_2 \right) \leq \\
 &\leq C_{12} \|\phi\|_{\tilde{H}_0^\sigma} \left(\frac{\omega_{1,1}(h_1, h_2)}{\omega_{1,1}(h_1, h_2)} + \frac{1}{k(h_1) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \frac{\omega_{1,1}(t_1, h_2)}{t_1} k(t_1) dt_1 + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega_{1,1}(h_1, t_2)}{t_2} k(t_2) dt_2 + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{k(h_1) k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} \int_{h_1}^{b_1 - a_1} \int_{h_2}^{b_2 - a_2} \frac{\omega_{1,1}(t_1, t_2)}{t_1 t_2} k(t_1) k(t_2) dt_1 dt_2 \right) \leq \\
 &\leq C_{12} \|\phi\|_{\tilde{H}_0^\sigma} \left(\frac{\omega_{1,1}(h_1, h_2)}{\omega_{1,1}(h_1, h_2)} + \frac{k(h_1) \omega_{1,1}(h_1, h_2)}{k(h_1) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)}{k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} + \frac{k(h_1) k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)}{k(h_1) k(h_2) \omega_{1,1}(h_1, h_2)} \right) = C \|\phi\|_{\tilde{H}_0^\sigma}.
 \end{aligned}$$

Ya'ni

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t_1 \leq b_1 - a_1} \frac{\omega(f; t_1, 0)}{t_1^{\alpha_1} \omega_{1,1}(t_1, b_2 - a_2)} &\leq C_1 \|\varphi\|_{\tilde{H}_0^{\alpha}}, \\ \sup_{0 < t_2 \leq b_2 - a_2} \frac{\omega(f; 0, t_2)}{t_2^{\alpha_2} \omega_{1,1}(b_1 - a_1, t_2)} &\leq C_2 \|\varphi\|_{\tilde{H}_0^{\alpha}}, \\ \sup_{\substack{0 < t_1 \leq b_1 - a_1 \\ 0 < t_2 \leq b_2 - a_2}} \frac{\omega(f; t_1, t_2)}{t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \omega_{1,1}(t_1, t_2)} &\leq C_{12} \|\varphi\|_{\tilde{H}_0^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Bundan (4) ning o'rinli ekanligini ko'ramiz.

$\varphi(x_1, x_2)|_{x_i=a_i} = 0, i = 1, 2$ ekanligidan (1) va (2) tengliklardan foysdalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \|f\|_{C(Q)} &= \max_{\substack{a_i \leq x_i \leq b_i \\ i=1,2}} \left| \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} k(x_1 - t_1) k(x_2 - t_2) (\varphi(t_1, a_2) - \varphi(a_1, a_2)) dt_1 dt_2 + \right. \\ &\quad + \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} k(x_1 - t_1) k(x_2 - t_2) (\varphi(a_1, t_2) - \varphi(a_1, a_2)) dt_1 dt_2 + \\ &\quad \left. + \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} k(x_1 - t_1) k(x_2 - t_2) \left(\Delta_{t_1 - a_1, t_2 - a_2}^{1,1} \varphi \right) (a_1, a_2) dt_1 dt_2 \right| \leq \\ &\leq C_{12} \left(\max_{a_1 \leq x_1 \leq b_1} \omega_{\varphi}^{1,0}(x_1 - a_1, 0) (x_1 - a_1) k(x_1 - a_1) + \right. \\ &\quad + \max_{a_2 \leq x_2 \leq b_2} \omega_{\varphi}^{0,1}(0, x_2 - a_2) (x_2 - a_2) k(x_2 - a_2) + \\ &\quad \left. + \max_{\substack{a_i \leq x_i \leq b_i \\ i=1,2}} \omega_{\varphi}^{1,1}(x_1 - a_1, x_2 - a_2) (x_1 - a_1) k(x_1 - a_1) (x_2 - a_2) k(x_2 - a_2) \right) \leq C_{12} \|\varphi\|_{\tilde{H}_0^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Ushbu tengsizlik va (4) dan quyidagi kelib chiqadi

$$\begin{aligned} \|f\|_{\tilde{H}_0^{\alpha}} &= \|f\|_{C(Q)} + \sup_{0 < t_1 \leq b_1 - a_1} \frac{\omega(f; t_1, 0)}{t_1 k(t_1) \omega_1(t_1)} + \sup_{0 < t_2 \leq b_2 - a_2} \frac{\omega(f; 0, t_2)}{t_2 k(t_2) \omega_2(t_2)} + \\ &+ \sup_{\substack{0 < t_i \leq b_i - a_i \\ i=1,2}} \frac{\omega(f; t_1, t_2)}{t_1 t_2 k(t_1) k(t_2) \omega_{1,1}(t_1, t_2)} \leq C_{12} \|\varphi\|_{\tilde{H}_0^{\alpha}}. \end{aligned}$$

$f(x_1, x_2)|_{x_i=a_i} = 0, i = 1, 2$ tenglikni isbotlash uchun (3) tenglikda $t_i = x_i - (x_i - a_i) \xi_i, i = 1, 2$ kabi almashtirishlar olamiz, natijada

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (\tilde{K}\varphi)(x_1, x_2) = \\ &= (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(x_1 - (x_1 - a_1)\xi_1, x_2 - (x_2 - a_2)\xi_2)}{[k(x_1\xi_1 - a_1\xi_1)k(x_2\xi_2 - a_2\xi_2)]^{-1}} d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

$\varphi(x_1, x_2)|_{x_i=a_i} = 0, i = 1, 2$ dan

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2)| &= |(\tilde{K}\varphi)(x, y)| \leq \\ &\leq C_{12} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \int_0^1 \int_0^1 \omega_{\varphi}(1 - \xi_1, 1 - \xi_2) k((x_1 - a_1)\xi_1) k((x_2 - a_2)\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_{12} \frac{k(x_1 - a_1)k(x_2 - a_2)}{(x_1 - a_1)^{-1}(x_2 - a_2)^{-1}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\omega_\varphi(1 - \xi_1, 1 - \xi_2)}{\xi_1^{\lambda_1} \xi_2^{\lambda_2}} d\xi_1 d\xi_2 = \\ = C(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)k(x_1 - a_1)k(x_2 - a_2)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa $x_i \rightarrow a_i$ da $f(x_1, x_2)|_{x_i=a_i} = 0, i = 1, 2$.

Xulosalar. Aralash uzluksizlik moduli bilan aniqlangan ikki o'zgaruvchili funktsiyali Volter o'ramasi ma'nosidagi aralash integral operatori uchun Zigmund ma'nosidagi baholari olinib, ushbu baholardan foydalanib, umumlashgan Hölder fazosida Volter o'ramasi ma'nosidagi aralash integral operatori xossasi o'rganildi. Bu natijalardan shuni xulosa qilish mumkin, agar qaralayotgan integral operator (4) ko'rinishda bo'lsa, u holda ikki o'zgaruvchili funktsiyalar uchun ham xuddi bir o'zgaruvchili funktsiyalarda olingan teoremlarga [8] o'xshash teoremani olish mumkin ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Баба-Заде М.А. Об одном классе непрерывных функций двух переменных// Уч. зап. МВ и ССОАзССР, серфиз-мат наук, (1979), №3. с. 315-321
2. Карапетянц Н.К., Мусалаева З.У. Дробное интегро-дифференцирование произвольного порядка в обобщенных Гельдеровских классах/Рук. деп. в ВИНТИ 25.11.93. №2917-B93.41с
3. Мурдаев Х.М. Оценка модуля непрерывности интегралов и производных дробного порядка. Деп. в ВИНТИ 14.0435. №4209. Грозный, (1985)
4. Самко С.Г., Мурдаев Х.М. Весовые оценки модулей непрерывности дробных интегралов от функций, имеющих с весом заданный модуль непрерывности. Ростов н/Д, (1986), С. 42. Деп. ВИНТИ 11.05.86, № 3351-B.
5. Самко С.Г., Мурдаев Х.М. Действие дробного интегро - дифференцирования в весовых обобщенных пространствах Гельдера.// Вопросы вычислений и прикладной математики. Ташкент, (1986), Вып. 80. с. 116-117.
6. Kilbas A, Saigo M, Bubakar S. Zygmund type Estimates and Mapping Properties of operators with power-logarithmic kernels in generalized Hölder spaces// Math. Japonica, (1994), № 3. P. 473-485.
7. Samko S. G., Murdayev Kh. M. Weighted Zygmund estimates for fractional differentiation and integration and their applications// Proc. Steklov Inst. Math. (1989) № 3, P. 233-235.
8. Samko S.G., Musalaeva Z.U. Fractional type operators in weighted generalized Hölder spaces // Proc. of Georgian Acad. Sciences. Math. (1993), vol. 1, № 5. P. 601-626
9. Mamatov, T. Mapping properties of mixed fractional differentiation operators in Hölder spaces defined by usual Hölder condition. *Journal of Computer Science and Computational Mathematics* **2019**, 9(2), 103-102
10. Mamatov, T. Operators of Volterra convolution type in generalized Hölder spaces. *Poincare Journal of Analysis and Applications* **2020**, 7(2), 275-288
11. Mamatov, T; Mustafoev N. Mixed integral operator of the Volterra convolution type in weighted generalized Hölder space. *Poincare Journal of Analysis and Applications* **2023**, 10(1), 135-154
12. Mamatov, T; Samko, S. Mixed fractional integration operators in mixed weighted Hölder spaces. *Fractional Calculus and Applied Analysis* **2010**, 13(3), 245-260
13. Mamatov T. Finite-element method for solutions of the fractional differential equation// International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering AIP Conf. Proc. 3244, 020032-1–020032-9, 27.11.2024; <https://doi.org/10.1063/5.0242238>
14. Mamatov T. Representation of distribution functions by fractional Riemann-Liouville integrals// International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering AIP Conf. Proc. 3244, 020002-1–020002-10, 27.11.2024; <https://doi.org/10.1063/5.0242239>
15. Mamatov T. The Isomorphism Realized By Mixed Fractional Integrals In Hölder Classes// Journal of Computer Science & Computational Mathematics, Vol.10(2), June 2020, P. 35-40

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17697183>

KASR TARTIBLI HOSILALARNING FIZIK MODELLARDA QO‘LLANISHI

RAXMONOV KAYUM KIYAMOVICH

fiz.-mat. fanlari nomzodi, dotsent, Buxoro davlat texnika universiteti, Buxoro, O‘zbekiston

Annotatsiya. Maqolada kasr tartibli differensiallashning fizik mazmuni va qo‘llanishi mumkinligi masalasi ko‘rib chiqilgan. Kasr tartibli hosilalar va integral apparatini “elastiklik – qovushqoq elastiklik – yopishqoq suyuqlik” xususiyatlariga ega muhit modelini tasvirlashda qo‘llashning umumlashtiruvchi xarakteri namoyish etilgan. Bir tomondan, uzlukli muhitning fizik modellari (“elastiklik – qovushqoq elastiklik – yopishqoq suyuqlik”) umumiyliги ko‘zga tashlanadi, boshqa tomondan esa kasr tartibli hosilalar va integral apparatini ushbu masalalarga qo‘llashning asosli ekanligi ko‘rsatiladi.

Kalit so‘zlar: kasr tartibli hosila, kasr tartibli integral, elastiklik, qovushqoq elastiklik, yopishqoq suyuqlik, Kantor to‘plami, fraktal.

APPLICATION OF FRACTIONAL-ORDER DERIVATIVES IN PHYSICAL MODELS

Abstract. This paper examines the physical meaning and applicability of fractional differentiation. The generalized nature of applying the apparatus of fractional-order derivatives and integrals to describe media characterized by “elasticity - viscoelasticity – viscous fluid” properties is demonstrated. On the one hand, the commonality of physical models of continuous media (“elasticity – viscoelasticity – viscous fluid”) is observed; on the other hand, the validity of employing fractional-order derivatives and integrals in these problems is substantiated.

Keywords: fractional derivative, fractional integral, elasticity, viscoelasticity, viscous fluid, Cantor set, fractal.

Klassik holatlarda hosiladan jarayonning o‘tish tezligini (tegishli o‘q yo‘nalishida) aniqlash uchun foydalaniladi. Ikkinchi tartibli hosila tezlanishni, uchinchi tartibli hosila esa muhitning yopishqoqligini hisobga olish uchun qo‘llaniladi. Umuman olganda, yuqori (butun) tartibli hosilalar matematik konstruksiyalardagi ichki masalalarni hal etishda qo‘llaniladi. Kasr tartibli hosila va integral apparati [11; 12] esa fizik jarayonlarni modellashtirishda tobora kengroq qo‘llanilmoqda [2; 4; 6; 8; 10]. Shu boisdan, ushbu apparatning qaysi masalalarda va qanday sharoitlarda qo‘llanishi maqsadga muvofiq va ruxsat etilganligini anglab olish muhim ahamiyat kasb etadi.

Tabiiyki, kasr tartibli hosilalar va integrallarga (keyingi o‘rinlarda — kasr tartibli hosila yoki kasr tartibli differensiallash) ma‘lum talablar qo‘yilishi mumkin. Shunday talablardan biri shundaki, agar tartib butun songa yaqinlashsa, hosila oddiy butun tartibli hosilaga mos kelishi lozim. Ushbu talab, shuningdek differensiallashning boshqa xususiyatlari ham bajariladi [12]. Shuningdek, boshqa talablar ham mavjud bo‘lib, ularni ehtimol “kutilmalar” deb atash maqsadga muvofiqdir.

Masalan, $f(x) = x^n$ funksiyaning n -tartibli hosilasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!.$$

Kasr tartibli hosilalar turlicha yo‘llar bilan aniqlanadi. Bu yerda Riman–Liuvill ta‘rifi [12]

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad (1)$$

hamda butun tartibli hosilaning x^n kabi darajali funksiya uchun umumlashtirilgan ta‘rifi [2] da ko‘rib chiqilgan:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^k) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}. \quad (2).$$

Agar kasr tartibli hosilaning tartibi monomning tartibiga teng bo'lsa, kutilgan natijalar o'z tasdig'ini topadi. Haqiqatan ham, (2) ga binoan:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)} = n!,$$

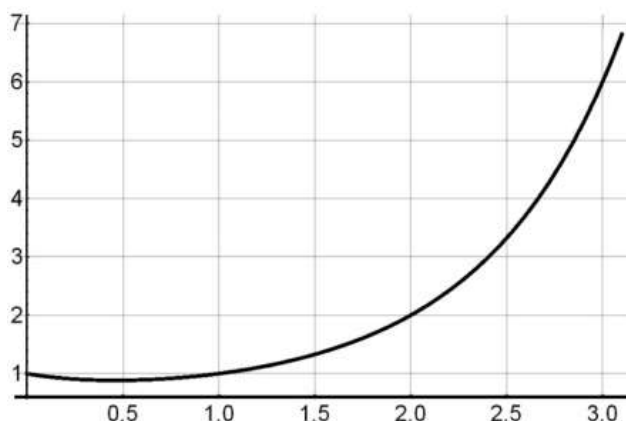
shuning uchun:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(x^\alpha) = \Gamma(1+\alpha), \quad (3)$$

bundan tashqari (1) ga muvofiq $t = ux$ almashtirishni hisobga olgan holda:

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha(x^\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^\alpha dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{(ux)^\alpha x du}{x^\alpha (1-u)^\alpha} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{u^\alpha du}{(1-u)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \Gamma(1-\alpha) \cdot \Gamma(1+\alpha) = \Gamma(1+\alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

1-rasmda (3) ifoda uchun $0 \leq \alpha \leq 3$ oralig'ida qurilgan grafik keltirilgan.



1-rasm. (3)-ifoda bo'yicha hosilaning qiymatlari, differensiallash tartibi monom tartibi bilan mos kelganda, $0 \leq \alpha \leq 3$

$y = \sin x$ funksiyaning α kasr tartibli hosilasi quyidagicha

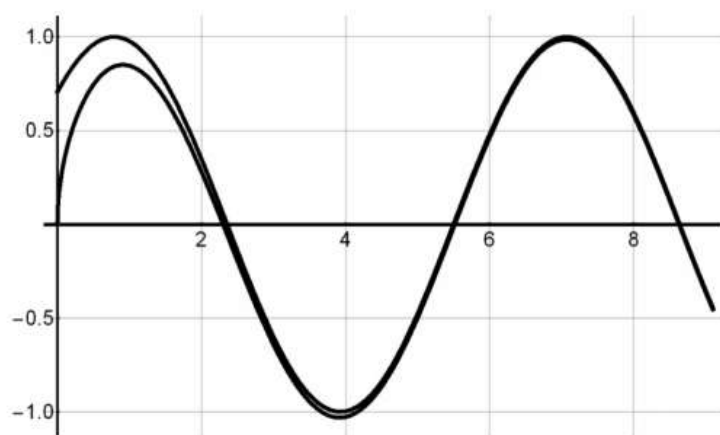
$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \alpha\right) \quad (5)$$

bo'ladi.

Biroq $y = \sin x$ funksiyaning Riman-Liuvill kasr tartibli hosilasini hisoblash ma'lum qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi (shuningdek, $x \rightarrow 0$ bo'lganda $D_{0+}^\alpha(\sin x) \rightarrow 0$ ekanligini ham ham qayd etish lozim):

$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{\alpha}(\sin x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\sin t dt}{(x-t)^{\alpha}} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{1-\alpha} (x-t)^{1-\alpha} \sin t \Big|_0^x + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x \frac{\cos t}{(x-t)^{\alpha-1}} dt \right] = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-\alpha} \int_0^x \frac{\cos t}{(x-t)^{\alpha-1}} dt \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{\cos t}{(x-t)^{\alpha}} dt
 \end{aligned} \tag{6}$$

ifoda (5) ifodadan farq qiladi. (5) va sonli usul yordamida (6) uchun $\alpha=0,5$ holatida qurilgan grafiklar 2-rasmda keltirilgan. O'tish jarayoni kamida bitta davr davom etadi.

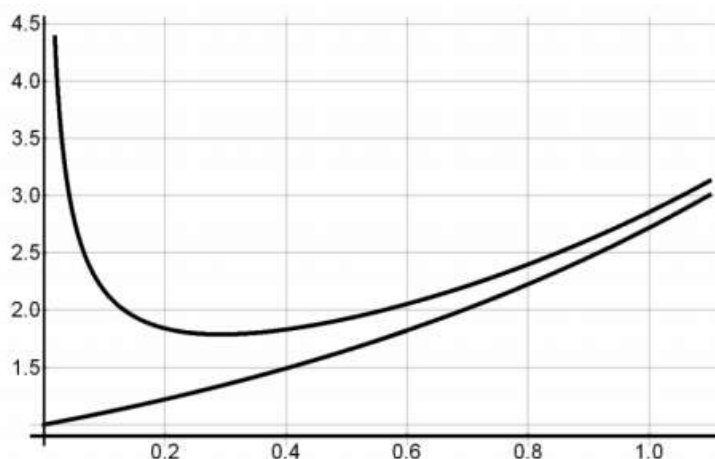


2-rasm. Differentsiallashtirish tartibi $\alpha=0,5$ bo'lgan holatda (5) va (6) ifodalar bo'yicha hosilalar,

Shunga o'xshash holat $y = e^x$ funksiyasini differentsiallashtirishda ham kuzatiladi, bunda natijada invariantlik saqlanishi kutiladi. Kutilgan invariantlik $x \rightarrow \infty$ da asimptotik tarzda kuzatiladi:

$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{\alpha}(e^x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\alpha}} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{1-\alpha} (x-t)^{1-\alpha} e^t \Big|_0^x + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \right] = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[x^{-\alpha} + \int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\alpha}} \right] = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[x^{-\alpha} + \int_0^x \frac{e^{x-u} du}{u^{\alpha}} \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[x^{-\alpha} + e^x \int_0^x u^{(1-\alpha)-1} e^{-u} du \right] \rightarrow e^x. \tag{7}
 \end{aligned}$$

$\alpha=0,5$ holati uchun olingan natijalar taqqoslanishi 3-rasmda keltirilgan.



3-rasm. $y = e^x$ funksiyasi va uning $\alpha=0,5$ tartibli hosilasining grafigi.

Qiziqarli masalalardan biri - kasr tartibli differensiallashning fraktal tuzilmalarga qo'llanish imkoniyatidir. Agar fraktalning shakllanish jarayonini Kantor to'plami sxemasi bo'yicha, birlik massali elementlardan tashkil topgan holda (4-rasm) ko'rib chiqilsa va uning umumiy massasini baholashga urinish qilinsa, quyidagini olish mumkin:

$$M = 2^k = e^{k \ln 2} = e^{\frac{\ln L}{\ln 3} \ln 2} = L^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} = L^{d_H},$$

bu yerda d_H - Xausdorff-Bezikovich o'lchami [14].



4-rasm. Kantor to'plami (to'rtinchi avlod prefraktali).

Differensiallashning ikki varianti mavjud. Birinchi variant - chiziqli o'lcham L bo'yicha formal differensiallash, uning yordamida zichlik (chiziqli zichlik) aniqlanadi:

$$\rho = \frac{dM}{dL} = \frac{\ln 2}{\ln 3} L^{\frac{\ln 2}{\ln 3} - 1} \sim L^{d_H - d_T},$$

bu yerda d_T - topologik o'lcham.

Shunday formal differensiallash kasr tartibli o'lchamli fazoda entropiyani ifodalashga nisbatan qo'llanilganda [1], aniq fizik mazmunga ega natijaga olib kelgan.

Aksincha, massa d_H - fraktal o'lcham bo'yicha differensiallanganda olingan natijani fizik jihatdan talqin qilish zarur bo'ladi:

$$D_{0+}^{d_H}(M) = \Gamma(1 + d_H).$$

Shunga o'xshash holat, masalan, Sierpinski gilami va boshqa fraktal tuzilmalar uchun ham xosdir.

Nihoyat, kasr tartibli differensiallashni qovushqoq elastiklik nazariyasida qo'llash natijasi alohida ilmiy qiziqish uyg'otadi. Bunday turdagi masalalarni yechishning klassik yondashuvi shundan iboratki, Laplas-Karson tasvirlar fazosida qovushqoq elastiklik masalasining qo'yilishi elastiklik masalasining qo'yilishiga o'xshash ko'rinishga ega bo'ladi (faqat boshqa mexanik xususiyatlarga ega). Shu sababli, mos elastik masalaning yechimini olib, uni Laplas-Karson tasvirlarida ifodalab (mos mexanik konstantalar almashtirilganda) va teskari o'zgartirishni qo'llash orqali viskoelastik masalaning yechimi olinadi [3; 9].

Kasr tartibli differensiallash apparatini qo'llash esa bunday turdagi masalalarning qo'yilishini yanada kengroq fizik talqinda ko'rishga imkon beradi.

Uzluqli muhit mexanikasida ikki (ma'lum ma'noda, qarama-qarshi) tipdagi muhit farqlanadi:

1. Elastik material - deformatsiya ε va kuchlanish σ orasidagi bog'lanish Guk qonuni bilan aniqlanadi: $\sigma = E\varepsilon$ yoki $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$,

2. Suyuq yopishqoq muhit - bu bog'lanish Nyuton qonuni bilan ifodalanadi:

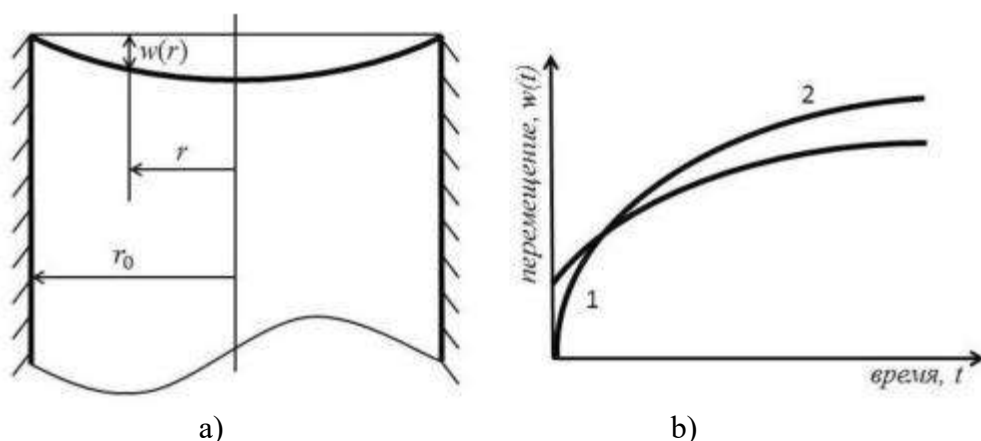
$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \text{ yoki } \varepsilon = \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\xi) d\xi,$$

bu yerda E - elastiklik moduli, η — suyuqlikning yopishqoqlik koeffitsienti.

Bu turdagi masalalarni umumiy shaklda ifodalash uchun kasr tartibli differensiallash D^β va integrallash I^α amallarini qo'llashdan iborat:

$$\sigma = BD^\beta \varepsilon \text{ yoki } \varepsilon = AI^\alpha \sigma, \quad (8)$$

bu yerda $B=E$, $\beta=0$, $A=1/E$, $\alpha=0$ bo'lganda - Guk qonuni, $B=\eta$, $\beta=1$, $A=1/\eta$, $\alpha=1$ bo'lganda esa - Nyuton qonuni hosil bo'ladi.



5-rasm. Silindrik materialning o'z og'irligi ta'sirida siljishi.

Tashqi sirtidan mahkamlangan elastik materialdan tayyorlangan silindr qatlamlarining vertikal siljishi, siljish moduli G va zichligi ρ bo'lgan holda, quyidagi munosabat bilan aniqlanadi [2; 4]:

$$w(r) = \frac{\rho}{4G} (r_0^2 - r^2). \quad (9)$$

Mos qovushqoq elastik qo'yilishdagi masala yechimi esa, kuchlanish va deformatsiya orasidagi bog'lanish quyidagi ko'rinishda berilganda olinadi [3; 9]:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \xi) d\sigma(\xi), \quad (10)$$

bunda sudralish yadrosi, masalan, $\Pi(t) = \Pi_0 e^{-qt}$ shaklida (bu yerda Π_0 va q - tajriba yo'li bilan aniqlanadigan parametrlar) ifodalanadi va uning ko'rinishi (5b-rasmdagi 2-egri chiziq) [2]:

$$w(r, t) = \frac{\rho}{4G} (r_0^2 - r^2) \left[1 - \frac{\Pi_0}{q} (1 - e^{-qt}) \right]. \quad (11)$$

Mos konstantalarni almashtirish va teskari almashtirishni qo'llash natijasida qovushqoq elastiklik masalasining yechimi olinadi [2].

Shuni ta'kidlash lozimki, agar (10)-munosabatdagi yadroni Duffing yadrosi [12] ko'rinishida olinsa: $\Pi(t) = \Pi_0 t^\alpha$, unda yechim quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$w(r, t) = \frac{\rho}{4G} (r_0^2 - r^2) t^\alpha. \quad (12)$$

Ko'rsatilgan yondashuvlar qovushqoq elastiklik nazariyasi masalalarini yechish uchun kuchli metodni taqdim etadi [3; 9]. Shu bilan birga, ular «elastiklik – qovushqoq elastiklik – yopishqoq suyuqlik» masalalar zanjirida umumiy bog'lanish mavjudligi haqida tushuncha bermaydi. Bunday bog'lanishni kasr tartibli hosila (1) va kasr tartibli integral [12] apparatini qo'llash orqali aniqlash mumkin:

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (13)$$

Shu yondashuv doirasida (12)-munosabat quyidagi shaklga keltiriladi [2]:

$$w(r, t) = \frac{1}{C} \left\{ I^\alpha \left[\rho \frac{r_0^2 - r^2}{2} (t) \right] \right\} = \frac{\rho}{C\Gamma(1+\alpha)} \frac{r_0^2 - r^2}{2} \cdot t^\alpha. \quad (14)$$

Darhaqiqat, tartib $\alpha=0$ bo'yicha differensiallash elastiklik masalasining yechimini beradi, tartib $\alpha \in (0, 1)$ bo'yicha differensiallash qovushqoq elastiklik nazariyasi masalasining yechimini beradi, lekin tartib $\alpha=1$ bo'yicha differensiallash quyidagi ifodaga olib keladi:

$$w(r, t) = \frac{\rho}{C\Gamma(1+\alpha)} \frac{r_0^2 - r^2}{2} \cdot t, \quad (15)$$

uning birinchi vaqt bo'yicha hosilasi:

$$v(r) = \frac{dw(r, t)}{dt} = \frac{\rho}{C\Gamma(1+\alpha)} \frac{r_0^2 - r^2}{2}. \quad (16)$$

Mos konstantalarni almashtirish orqali ushbu ifoda quvur ichida yopishqoq (yopishqoq) suyuqlikning, yopishqoqlik koeffitsienti μ bilan bosim farqi Δp va uzunlik L bo'yicha tezlik taqsimotini beradi [7; 13]:

$$v(r) = \frac{\rho p}{L} \frac{1}{4\mu} (r_0^2 - r^2). \quad (17)$$

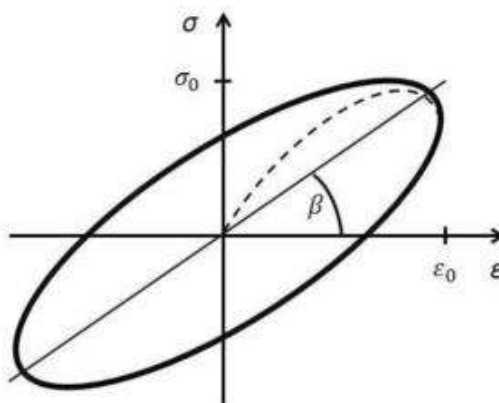
Ma'lum bir viskoelastik material uchun (8) munosabatdagi C va α parametrlarini tajriba yo'li bilan aniqlash mumkin. Ularni turli mexanik sinovlar, masalan, sudralish va relaksatsiya tajribalari yordamida aniqlash mumkin [5]. α parametrini aniqlashga oid yana bir yondashuv mavjud. U mexanik gisterezis halqasini tahlil qilishga asoslangan bo'lib, halqa tsiklik yuklanishda, aylanish chastotasi ω bo'yicha quyidagi qonun asosida paydo bo'ladi:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t.$$

Keyin yechim (5) shaklida qidiriladi (natijada, (6) uchun ham – 6-rasmdagi nuqtali egri chiziq):

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi) = \sigma_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \alpha\right), \quad (18)$$

bunda faza siljishi $\varphi = \frac{\pi}{2} \alpha$ shaklida ifodalanadi, bu esa kasr tartibli differensiallash α ni ajratib ko'rsatish uchun qulaydir.



6-rasm. Qovushqoq-elastik materialning mexanik gisterezi.

Bu holatda mexanik gisterezis halqasi ellips shaklida bo‘ladi, uning asosiy o‘qi β burchak ostida egilgan (6-rasm) va bu burchak faza siljishi φ bilan differensiallash tartibi α ga bog‘liq munosabat orqali aniqlanadi [4]:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_0^2 - \sigma_0^2} \cos \varphi \quad (19)$$

o‘lchovli koordinatalarda yoki o‘lchovsiz koordinatalarda ellips radiusi $R = \sin \varphi$ orqali belgilanadi.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan ma’lumotlarga asoslanib, quyidagi xulosa chiqarish mumkin: bir tomondan, «elastiklik – qovushqoq elastiklik – yopishqoq suyuqlik» zanjirida uzlukli muhitning fizik modellari umumiyliги namoyon bo‘ladi; boshqa tomondan, kasr tartibli hosilalar va kasr tartibli integrallar apparatini ushbu masalalarga qo‘llashning asosli ekanligi ko‘rsatiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Баланкин А.С., Бугримов А.Л. Фрактальная теория пластичности полимеров //Высокомолекулярные соединения. Серия А: Физика полимеров. Т. 34. 1992. № 5.С. 129–132.
2. Бугримов А.Л. Об одном подходе к построению физических соотношений обобщенного вида в механике деформируемого твёрдого тела// Каучук и резина. 1994. № 4. С. 28–32.
3. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука. 1970. 280 с.
4. Колотилов А.В., Бугримов А.Л. Прочность и механическая надёжность зарядов твердого топлива и средств пиротехники. М.: Министерство обороны СССР, 1990. 135 с.
5. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 277 с.
6. Корчагина А.Н. Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред// Известия Алтайского государственного университета.Т. 1. 2014. № 1 (81). С. 65–67.
7. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика //учеб. под ред. И.А. Кибеля; 4-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
8. Мерзиевский Л.А., Корчагина А.Н. Моделирование распространения теплового импульса во фрактальной среде// Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны. Труды международной конференции «XI Харитоновские тематические научные чтения», Саратов, 16–20 марта 2009 г. Саратов, 2009. С. 250–254.
9. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 328 с.
10. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация// Теоретическая и математическая физика. Т. 90. 1992. № 3. С. 354–368.
11. Риман Б. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Риман Б. Сочинения / пер с нем. под ред. В.Л. Гончарова, М.; Л.: Государственное издательство теоретико-технической литературы, 1948. С. 262–275.
12. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. Т. 2. М.: Наука. 1976. 568 с.
14. Федер Е. Фракталы / пер. с англ. М.: Мир. 1991. 254 с.
15. T. Mamatov, Mixed fractional integration in mixed weighted generalized Hölder spaces, Case Studies Journal, 7(6), (2018), 1-8
16. T. Mamatov, Mapping properties of mixed fractional differentiation operators in Hölder spaces defined by usual Hölder condition. Journal of Computer Science and Computational Mathematics, 9(2), (2019), 103-102
17. T. Mamatov, Operators of Volterra convolution type in generalized Hölder spaces, Poincare Journal of Analysis and Applications, 7(2), (2020), 275-288
18. T. Mamatov and N. Mustafiev, Operators of Volterra convolution type in weighted generalized Hölder space, Poincare Journal of Analysis and Applications, 10(1), (2023), 135-154
19. T. Mamatov and S. Samko, Mixed fractional integration operators in mixed weighted Hölder spaces. Fractional Calculus and Applied Analysis. 13(3), (2010), 245-260
20. Mamatov, T.; et al. International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering, AIP Conf. Proc. 3244, 020032-1–020032-9, 27.11.2024
21. Mamatov, T.: et al. International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering, AIP Conf. Proc. 3244, 020002-1–020002-10, 27.11.2024

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17697245>
УДК:373.5.016:53:004.

МЕКТЕПТЕ ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУДА ВИРТУАЛДЫ ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТАРДЫ ӨТКІЗУ ӘДІСТЕМЕСІ

МҮСІРОВА МЕРУЕРТ ТӨЛЕГЕНҚЫЗЫ

Абай атындағы ҚазҰПУ, Математика, физика және информатика факультетінің
7М1504-Физика білім беру бағдарламасының 1-курс магистранты

Ғылыми жетекшісі – п.ғ.к., қауымдастырылған профессор **СЫДЫКОВА Ж.К.**
Алматы, Қазақстан

Аңдатпа: Қазіргі білім беру жүйесінде физика пәнін оқытудың тиімді жолдарының бірі – зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру болып табылады. Зертханалық жұмыс – оқушылардың теориялық білімін тәжірибемен ұштастырып, физикалық құбылыстарды өз көздерімен бақылап, заңдылықтарды тәжірибе арқылы дәлелдеуге мүмкіндік беретін маңызды оқу үрдісінің бөлігі. Мұндай жұмыстар оқушылардың қызығушылығын арттырып қана қоймай, олардың ғылыми-зерттеу дағдыларын қалыптастырады, логикалық ойлауын, талдау және қорытынды жасау қабілеттерін дамытады. Осы жұмыста физикадағы зертханалық жұмыстардың маңызы мен орнын айқындау, оқыту экспериментін жүзеге асыру әдістерін қарастыру, ғылыми еңбектерге сүйене отырып, олардың нәтижелерін талдау және мектеп жағдайында өткізілетін зертханалық жұмыстың үлгісін көрсету көзделді. Сонымен қатар, физика мұғалімінің зертханалық сабақтарды ұйымдастырудағы басты назар аударатын тұстары да жан-жақты ашып көрсетілді

Кілт сөздер: зертханалық жұмыс, фронталді зертханалық жұмыс, математикалық маятник, онлайн симуляциялар, виртуалды зертхана.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ В ШКОЛЕ

Аннотация: В современной системе образования одним из наиболее эффективных способов обучения физике является организация лабораторных работ. Лабораторная работа позволяет учащимся соединить теоретические знания с практикой, наблюдать физические явления своими глазами и экспериментально подтвердить законы. Такие занятия не только повышают интерес к предмету, но и формируют у обучающихся исследовательские навыки, развивают логическое мышление, умение анализировать и делать выводы. В данной работе рассматривается значение и роль лабораторных работ в физике, методы реализации учебного эксперимента, анализируются результаты научных исследований, а также приведён пример выполнения одной школьной лабораторной работы. Кроме того, подробно раскрыто, на что должен обращать внимание учитель физики при организации лабораторных занятий.

Ключевые слова: лабораторная работа, фронтальная лабораторная работа, математический маятник, онлайн-симуляции, виртуальная лаборатория.

METHODOLOGY FOR CONDUCTING VIRTUAL LABORATORY WORK IN SCHOOL PHYSICS

Abstract: In the modern education system, one of the most effective ways of teaching physics is through the organization of laboratory work. Laboratory activities allow students to connect theoretical knowledge with practical experience, observe physical phenomena firsthand, and experimentally confirm physical laws. Such activities not only increase students' interest in the

subject but also develop their research skills, logical thinking, analytical abilities, and capacity for drawing conclusions. This paper explores the importance and role of laboratory work in physics, examines methods for implementing teaching experiments, analyzes findings from scientific studies, and presents an example of a school-level laboratory experiment. Additionally, it highlights key aspects that physics teachers should focus on when organizing laboratory sessions.

Keywords: *laboratory work, frontal laboratory work, mathematical pendulum, online simulations, virtual laboratory.*

Қазіргі таңда физиканы мектепте оқытуда зертханалық жұмыстардың алар орны ерекше. Физиканы оқыту жүйесі теориялық білім, физикалық заңдылықтармен танысу, есептер шығару, зертханалық жұмыстарды орындау мен бөлімдік жиынтық бағалау (БЖБ) және тоқсандық жиынтық бағалаудан (ТЖБ) тұрады. Зертханалық жұмыстарды орындау оқушының физиканы пәнін теориялық негізі мен практикалық жұмыстарын ұштастыра отырып меңгеруін қамтамасыз етеді. Заман талабына сай виртуалды стимуляцияларды қолдану қазіргі таңда ұстазға зертханалық жұмысты өткізудің тиімді платформасы болып отыр.

Физика пәнін оқытуда эксперимент өткізу өте маңызды рөл атқарады. Себебі, оқушы алған білімін зерттеу барысында қолдана алуы тиіс және физикалық ұғымдарды тереңірек түсіну үшін де оқушы визуалды түрде көрнекіліктерді қолдана отырып, өзі физикалық кейбір параметрлерді (массасын, ұзындығын) өзгерте алып физиканы игеруі тиіс. Мектептегі физикалық оқу экспериментіне қатысты бірқатар авторлар еңбегін қалдырып кеткен, соның бірі М.Құдайқұлов. Оның «Орта мектепте физиканы оқыту әдістемесі» атты еңбегінде физиканы оқыту әдістері айтылып, физикалық оқу экспериментті де классификацияларға жіктелініп, олардың артықшылықтары, ұйымдастыру маңызыда айтылып кеткен [1].

Берілген мақалада автор физикалық эксперименттің маңызы оқушының зерттеушілік пен қоршаған ортаны бақылау сияқты дағдыларын дамытумен ұштастырған. Негізінен, физика пәнін оқытуды физикалық эксперименттер ұйымдастыру формасына қарай 6 топқа бөлінеді [1]:

1. Демонстрациялық эксперимент.
2. Зертханалық жұмыс.
3. Физикалық практикум.
4. Сыныптан және мектептен тыс жүргізілетін эксперимент.
5. Эксперименттік есептер шығару.
6. Қолдан физикалық құралдар жасау.

Демонстрациялық эксперимент негізінен сабақ өткізудің бір бөлігін құраса, лабораториялық эксперимент түгел сабақтың уақытын алады. Демонстрациялық эксперимент жаңа тақырыпты меңгеру барысында оқушыларға абстрактілі элементтерді көрнекі түрде түсіндіру. Мысалы, заттардың тығыздығын көрсету, олардың неліктен әртүрлі болатындығын визуалды түрде сипаттау.

Зертханалық жұмыс керісінше оқушы өзі орындай алатын физиканы оқытудың бір әдіс түрі. Зертханалық жұмыс жасау негізінен физиканы оқытудың негізгі бет бейнесі. Зертханалық жұмыс өткізу барлық талапқа сай орындалуы тиіс. Оның өзіндік ұсталыну керек ережелері және ерекшеліктері бар. Ерекшеліктерін атып өтетін болсақ, зертханалық жұмыс өткізу барысында оқушы өзінде зерттеуші кейіпке еніп, бақылау жүргізеді, зерттеу нәтижелерін алады. Зертханалық жұмыс орындау барысында физикалық құралдар мен танысып оларды қолдануын үйренеді. Осының салдарынан ғылымға деген қызығушылы артуы мүмкін. Және де оқушылар зертханалық жұмыс орындау барысында теорияны тек оқып, естіп меңгермей оның табиғатпен ұштасатынын сезініп, көреді. Физикалық құбылыстардың маңызын, табиғатта орындалып жатырған әр үдерістің физикамен байланысын көзбен көре алады.

Физика пәнін оқытуда мектепте зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру негізінен 3 топқа бөлінеді:

1. Фронталь зертханалық жұмыс.
2. Әр түрлі жұмыстар жүйесі.

3. Физикалық практикум.

Фронтальді зертханалық жұмыс кезінде оқушылар бір мезетте бірдей тәжірибемен айналысады. Әдетте, фронтальді зертханалық жұмыс белгілі бір тараудан кейін немесе жаңа тақырыпты меңгергеннен кейін өткізіледі. Және де мұғалімге фронтальді зертханалық жұмыс өткізу негізінен белгілі бір тақырыпты оқушыларына меңгерту барысында маңызды рөл атқарады. Әр оқушы кезекті өзінің зерттеу жұмысын жүргізе отырып, бақылайды, өлшемдерін өзгертеді және қорытындысын алады. Осы тұста дәстүрлі фронтальді зертханалық жұмыстарды орындау барысында барлық құрал жабдықты оқушыларға тарату және оны кері жинау мұғалімге оңайлыққа соқпайды. Сол себептен, виртуалды ортада зертханалық жұмыс өткізу ұтымды әдіс. Мұғалім виртуалды зертхананы өткізу барысында оқушылардың зейінін және бақылау дағдылары қалай жүзеге асып жатыр барлығын басты назарда ұстай алады.

Мақала тақырыбына сай басқа да авторлардың еңбегіне шолу жасасaq, «Виртуалды эксперименттер: модельдеу бағдарламалары арқылы физиканы оқытудың сиқыры» мақаласында автор Ә.М.Сейтмұхамбет физиканы модельдеу арқылы, дәлірек айтқанда виртуалды зертхана арқылы оқытудың артықшылықтарын және де виртуалды модельдеу физиканың дамуына қандай әсер алып келетіні туралы жазған. Автордың айтуынша, оқушылар дәстүрлі ортада белгілілі бір абстрактілі ұғымдарды игере алмайтын болса, виртуалды стимуляциялар оқушылардың физикалық көзге көрінбейтін ұғымдарды игеруіне көмегін тигізеді. Және де онлайн ортада физикалық параметрлерді визуализациялау оқушылардың меңгеру барысын қызықты әрі интерактивті етеді. Оқушылар параметрлерді өз көздерімен өзгерту арқылы олардың физикалық ұғымдарды терең түсіне алуын қамтамасыз етеді, онымен қоса сыни ойлау қабілетін дамытады. Автордың аса маңызды айта кеткені тұсы: виртуалды зертхана қазіргі таңда физиканы оқытуда негізгі элементіне айналады, яғни оқушылар виртуалды ортада зертхана жұмыстарын жасай отыра, өздеріне дерексіз мәліметтерді зерттей алады және бақылай алады [2]. Мен автордың негізгі ойымен толықтай келісемін, физикалық зертханаларды оқушы онлайн ортада жүзеге асыра алғаны өте тиімді және заман талабына сай көрнекі құрал. Қазіргі таңда виртуалды зертхананы өткізу және ұйымдастыру ұстаздың негізгі құралына айналуы қажет деп ойлаймын. Виртуалды зертхана барысында оқушылар физикалық ұғымды қалыптастыруы тиімді әрі жеңіл болады деген ойдамын.

Физиканы оқытуда арнайы бөлімге арналған әдісі ұсынылған «Орта мектепте электр және магнетизм бөлімін оқытуда заманауи технологияларды қолдану әдістемесі» тақырыбындағы мақалаға келетін болсақ, бұл мақала авторлары негізінен интерактивті жалпылама әдістерге тоқтала кеткен. Олар аталмыш бөлімдегі тек зертханалық жұмысқа тоқталып қана қоймай, тақырыпты теория жүзінде түсіндіру барысында, практикалық жұмыстарды орындау кезінде қолданылатын жалпы әдістерді сипаттаған. Орта мектепте электр және магнетизм бөлімін оқытуда негізді тиімді әдістерді талдап, эксперименттен өткізген. Электр және магнетизм бөлімі күрделі болғандықтан, оқушыларға заманауи технологиялар арқылы жеңіл әрі өмірге байланыстыра отырып түсіндіруге болатынын айтқан. Нақты физикалық виртуалды зертханалық жұмысқа арналған әдісінде, авторлар Phet Stimulation платформасын негізгі мысал ретінде қарастырған. Зерттеу жұмысының негізгі объектісі ретінде орта мектептегі 8 сыныпты қарастырған. «Электр тізбегін құрастыру және ток күшін зерттеу» тақырыбы аясында жұмыс атқарған. Осы тақырып аясында басқа әдіс тәсілдерге қарағанда, яғни арнайы қосымшалар (kahoot, quizziz), презентациялық көрнекіліктер мен STEM құрылғыларына қарағанда виртуалды зертханада қолданылатын стимуляциялардың қолдану жиілігі басымырақ болған [3].

Phet Interactive Stimulations платформасын электр тізбегін құрастыруда оқушыларға тапсырма беру кезінде виртуалды зертханалық жұмыс ретінде қолданған. Бұл әдісті қолдану барысында оқушылар эмпирикалық білім алуды, ғылыми ойлауды, зерттеу параметрлерін өзгерту арқылы әртүрлі жағдайды қарастыра отырып, проблеманы шешуді, сыни ойлауды меңгереді.

Мақалада зерттелген тәжірибе соңында, заманауи технологиялық әдісі қолданылған сыныптың білім меңгеру деңгейі әлдеқайда жоғары және тиімді әдіспен жүзеге асырылғандықтан оқушыларға қызықты әрі жеңіл жеткізілді.

Жалпы виртуалды зертхана дегеніміз онлайн ортада физикалық тәжірибелерді орындауға мүмкіндік беретін цифрлық оқу құралы. Виртуалды зертханалық жұмыстарда нақты құралдардың орнына интерактивті модельді немесе онлайн симуляцияларды қолданады. Мысалы: BilimLand платформасы, Phet Simulations, Crocodile Physics.

Phet Interactive Simulations (<https://phet.colorado.edu/>) – АҚШ Колорадо университетінде жасалынған онлайн симуляциялар платформасы. Бұл жерде жаратылыстану ғылымдарына бірнеше зертханалық жұмыстарды виртуалды ортада орындауға жағдай жасалынған. Физикадан 70-тен аса симуляциялар қарастырылған [5].

Bilimland платформасы (<https://bilimland.kz/kk/courses/simulation/fizika>) мектеп бағдарламасы бойынша қазақ, орыс және ағылшын тілдерінде интерактивті сабақтар, виртуалды лабораториялар, тесттер және симуляциялар ұсынады.

Crocodile Physics (http://www.sumdog.com/en/Crocodile_Physics/) - бұл виртуалды физикалық зертхана (компьютерлік бағдарлама), ол арқылы оқушылар мен студенттер физикалық құбылыстарды модельдеп, тәжірибе жасап, нәтижесін талдай алады.

Виртуалды зертханалардың ұйымдастыру маңызына тоқталатын болсақ, ең алдымен виртуалды зертхана қауіпсіз ортада жұмыс жасауға мүмкіндік береді. Оқушы көзбен көре алмайтын кейбір физикалық құбылыстарды, абстрактілі ұғымдарды нақты визуалды түрде түсіндіріп, физикалық түсінік қалыптастырады. Виртуалды зертханалық жұмыстардың барысында оқушы өз бетімен тәжірибе жасай отыра, нәтижесін ала алады. Нәтиже қате болған жағдайда бірнеше рет қайталап орындап көруге мүмкіндік болады.

9-сыныпта зертханалық жұмыс атауларымен мақсаттарына тоқтала кетсек. Алғашқы тарау «Кинематика негіздері» бойынша: «Теңүдемелі қозғалыс кезіндегі дененің үдеуін анықтау» және «Горизонталь лақтырылған дененің қозғалысын зерттеу» зертханалық жұмыстары бар. Ал, бесінші тарау «Тербелістер мен толқындар» бойынша: «Математикалық маятниктің көмегімен еркін түсу үдеуін анықтау» және «Беттік толқындардың таралу жылдамдығын анықтау» атты екі зертханалық жұмыстар бар. Зертханалық жұмысты онлайн стимуляция арқылы орындау және ұйымдастыру процесін ретімен қалай жүзеге асыру қажет екеніне тоқталайық:

Ең алдымен мұғалім оқушыларды зертханалық жұмыстың тақырыбымен оның мақсатымен таныстырады.

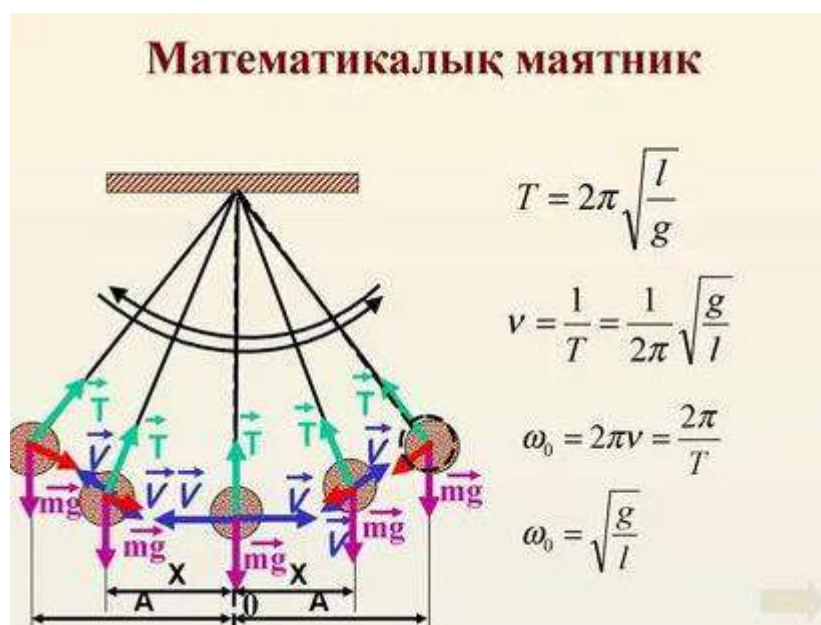
Тақырыбы: «Математикалық маятниктің көмегімен еркін түсу үдеуін анықтау»

Жұмыстың мақсаты: математикалық маятниктің тербеліс периодының $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ формуласы бойынша еркін түсу үдеуін анықтау [4].

Құрал-жабдықтар: Phet Stimulations платформасы, интерактивті тақта

Оқушылар зертханалық жұмыстың тақырыбы, мақсатымен танысады. «Тербелістер мен толқындар» тарауы бойынша Математикалық және серіппелі маятниктің тербелістері тақырыбын есіне түсіреді. Негізгі формулаларды ескереді. Зертханалық жұмыс басталмастан бұрын мұғалім математикалық маятник анықтамасын оқушылардан сұрақ-жауап әдісі арқылы оқушылардың өткен біліміне қайталау жұмыстарын жасайды.

Яғни, математикалық маятник деп массасын елемеуге болатын созылмайтын жіпке ілінген өлшемдері кішкентай денені айтады (1-сурет) [4].



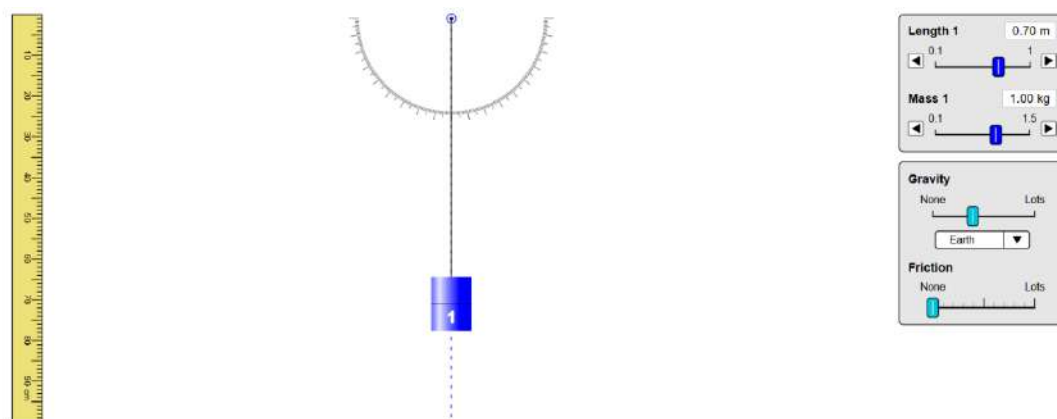
1-сурет

Мұғалім осы анықтаманы негізге ала отырып, зертханалық жұмысты ары қарай жалғастырады. Әрі қарай оқушыларға жұмыстың мақсаты аса маңызды екенін түсіндіре отыра, ол жұмыстың соңында күтілетін нәтижелер екенін түсіндіру қажет.

Математикалық маятниктің тербеліс периодының формуласы бойынша еркін түсу үдеуін анықтауға болады:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Оқушылар осы формуланы жазып алады, және әр белгіленудің мәнін түсінеді. Әрі қарай зертханалық жұмыс Phet Stimulations платформасында жүзеге асады. Мұғалім оқушылардың назарын интерактивті тақтаға бұрады (2-сурет):



2-сурет

Платформаны ашқан кезде оқушылар жоғарыдағыдай бейнені көреді [5]. Оқушылар сызғыштың ұзындықпен өлшенетінін, маятник ұшындағы білеуіштің массасын да ескереді. Виртуалды ортада зертханалық жұмыс жасау барысында мұғалім ағылшынша сөздік пайдаланып, физикалық ұғымдарға тоқталуы тиіс. Мысалы, length – ұзындық, gravity-гравитация.

Жұмысты орындау :

1. Математикалық маятниктің ұзындығын келтіріп алады;
2. Маятникті тепе-теңдікте тұрған кейіпін өзгертіп, оны платформа арқылы жылжытады.
3. N тербеліс жасауға кеткен Δt уақытты өлшейді;
4. Тәжірибені онлайн түрде 3 рет қайталайды;
5. Уақыттың Δt орташа мәнін есептеп, T тербеліс периодының орташа мәнін анықтайды.
6. $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ формуласы бойынша еркін түсу үдеуін анықтайды.
7. Өлшеу нәтижелерін кестеге жазады:

Тәжірибе нөмірі	l, м	N	$\Delta t, c$	$\Delta t_{орт}, c$	$T_{орт} = \frac{\Delta t_{орт}}{N}$	$g_{орт}, м/с^2$
1						
2						
3						

Әрі қарай оқушы виртуалды ортада орындаған зерттеу нәтижелері бойынша өз өлшемдерін алып, салыстырып, қорытындысын алады. Математикалық маятникті бұдан әрі көзге елестете алады, сезіне алады. Және математикалық маятник бойынша тербеліс периоды формуласы арқылы еркін түсу үдеуін есептей алады. Алынған мәндерді, $\Delta t_{орт}$ орташа уақыт мәнімен салыстырады және $T_{орт}$ орташа тербеліс периоды мәнінде есептейді.

Виртуалды зертхана барысында мұғалім оқушылардың теориялық білімін практика жүзінде көрсете алдыма соны басты назарда ұстануы қажет. Онымен қоса, физикалық ұғымдарды алынған платформа бойынша ағылшын сөздерін қазақша қабылдай алуын қадағалауы қажет. Өздері виртуалды ортада енгізген мәні бойынша, еркін түсу үдеуін есептей алдыма, тақырыпты меңгере алдыма, зертханалық жұмыс барысында қаншалықты сәтті орындады соны басты назарда ұстануы тиіс.

Қорыта келе, зертханалық жұмыстардың маңызы мен физикада алатын орнына тоқталдық. Физикада оқыту экспериментін жүзеге асыру барысында қанша әдіс барын айттық. Ғылыми еңбектерге тоқталып өттік, олардың зерттеу нәтижелерін талдадық. Мектепте өтілетін физикалық бір зертхана жұмысының орындалу мысалын көрсеттік. Мұғалімнің басты назарын ашып айттық.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ:

1. Құдайқұлов М., Жаңабергенов Қ. Орта мектепте физиканы оқыту әдістемесі. – Алматы, 1998. – 43б.
2. Сейтмұхаммбет Ә.М. Виртуалды эксперименттер: модельдеу бағдарламалары арқылы физиканы оқытудың сиқыры//Research reviews. –Прага, №10.-2025. – Б.99
3. Бекенов Ж.Т., Рыстыгулова В.Б., Қараней Д.Т., Аманбаева Қ.Е., Үсенова А.Е Орта мектепте электр және магнетизм бөлімін оқытуда заманауи технологияларды қолдану әдістемесі//Research reviews. –Прага, №10.-2025. – Б.99
4. Phet Interactive Stimulations - <https://phet.colorado.edu/>
5. Башарұлы Р., Ш.Шүйіншина., К.Сейфоллина. Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. – Алматы, 2019 - 159б.

СОДЕРЖАНИЕ CONTENT

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ **PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

MUSTAFOYEV NEMAT SAFOYEVICH [BUXORO, O'ZBEKISTON] IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR FAZOSIDA KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL OPERATORLAR NAZARIYASI.....	3
АЗЫМ ГҮЛНҰР ҚАЙРАТҚЫЗЫ [АЛМАТЫ, ҚАЗАҚСТАН] «ЖАРЫҚ ҚҰБЫЛЫСТАРЫ» ТАРАУЫН ОҚЫТУДА ДЕҢГЕЙЛЕП ТАПСЫРМАЛАРДЫ ҚҰРУ ЖӘНЕ ОРЫНДАУ НӘТИЖЕЛЕРІН ТАЛДАУ.....	13
UMAROV ALOVIDDIN OCHILOVICH [BUXORO, O'ZBEKISTON] ARALASH UZLUKSIZLIK MODULI BILAN ANIQLANGAN UMUMLASHGAN HÖLDER FAZOSIDA VOLTER O'RAMASI MA'NOSIDAGI OPERATORLAR.....	19
RAXMONOV KAYUM KIYAMOVICH [BUXORO, O'ZBEKISTON] KASR TARTIBLI HOSILALARNING FIZIK MODELLARDA QO'LLANISHI.....	26
МҮСІРОВА МЕРУЕРТ ТӨЛЕГЕНҚЫЗЫ, СЫДЫКОВА Ж.К. [АЛМАТЫ, ҚАЗАҚСТАН] МЕКТЕПТЕ ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУДА ВИРТУАЛДЫ ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТАРДЫ ӨТКІЗУ ӘДІСТЕМЕСІ.....	34



"IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION"

Контакт

els.education23@mail.ru

Наш сайт

irc-els.com